GUÍA DE EJERCICOS ECUACIONES DIFERENCIALES MAT– 103”

LA PAZ – BOLIVIA

GESTIÓN I/2021

GUÍA DE PRÁCTICAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER PARCIAL

Compruebe que la función indicada sea la solución explícita o implícita de la ecuación diferencial dada.

1. $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=12x^2;\quad y=c_1x^{-1}+c_2x+c_3xlnx+4x^2$

2. Verificar que la función dada, satisface la ecuación diferencial

$$y_{(x)}=C_1x+C_2x\int_0^x\frac{sent}{t}dt;\qquad xsenx*y''-xcosx*y'+ycosx=0$$

3. Verificar que la función dada, satisface la ecuación diferencial

$$ylny=x+\int_0^x e^{t^2}\,dt;\qquad (1+lny)y''+(y')^2=2xye^{x^2}$$

4. Verificar que la función dada, satisface la ecuación diferencial

$$y=e^{x^2}\left(C_1+C_2\int e^{-x^2}dx\right);\qquad y''-2xy'-2y=0$$

5. Demostrar que la ecuación $x^2=y^2(c-y^2)$, es solución de la ecuación diferencial:

$$xdx=\left(\frac{x^2}{y}-y^3\right)dy$$

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales, por separación de variables:

6. $y\ln x\frac{dx}{dy}=\left(\frac{y+1}{x}\right)^2$ $\quad Resp.\ \frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3=\frac{1}{2}y^2+2y+\ln y+c$

7. $(e^y+1)^2e^{-y}dx+(e^x+1)^3e^{-x}dy=0$ $\quad Resp.\ (e^x+1)^{-2}+2\,(e^y+1)^{-1}=c$

8. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$ $\quad Resp.\ (y+3)^5e^x=c(x+4)^5e^y$

9. $\sqrt{1-y^2}dx-\sqrt{1-x^2}dy=0$ $\quad Resp.\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}x$

10. $(3x-6y+4)y'+x-2y+3=0$ $\quad Resp.\ x=\frac{1}{5}(3x-6y-2\ln(x-2y+2))+C$

11. $y'=tan^2(x+y)$ $\quad Resp.\ 2(y-x)+sin2(x+y)=C$

12. $\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y}\right)dx+(x^2cosy)dy=0\ ;\ y_{(1)}=\pi$ $\quad Resp.\ ysiny+cosy+2=lnx+\frac{1}{x}$

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

13. $(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$

14. $xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3, para\ y(1) = 2;$

15. $\left(x + ye^{y/x}\right)dx - xe^{y/x}dy = 0; \quad y_{(1)} = 0$

16. $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

17. $ydx = \left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right)dy$

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas:

18. $y = \frac{x+3y-5}{x-y-1}$ $\qquad Resp.\ \ln[C(x + y - 3)] = -2\left(\frac{x-2}{x+y-3}\right)$

19. $(x - 2y - 3)dx + (2x + y - 1)dy = 0$ $\qquad Resp.\ \ln[C(x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2)] + 4arctg\left(\frac{y+1}{x-1}\right) + C$

20. $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x+y-1}{x+2}\right)^2$ $\qquad Resp.\ 2arctg\left(\frac{y-3}{x+2}\right) = \ln[C(x + 2)]$

21. $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$ $\qquad Resp.\ y^2 = xln(Cy^2)$

22. $y' = -\frac{3x^2y+y^2}{2x^3+3xy} \quad y(1) = -2$ $\qquad Resp.\ x^3y^2 + xy^3 = -4$

Resuelva las ecuaciones exactas:

23. $(x - y^3 + y^2\ senx)dx = (3xy^2 + 2y\ cosx)dy$ $\qquad Resp. xy^3 + y^2cosx - \frac{1}{2}x^2 = c$

24. $(y\ ln\ y - e^{-xy})dx + \left(\frac{1}{y} + x\ ln\ y\right) = 0$ $\qquad Resp. No\ es\ exacta$

25. $x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$ $\qquad Resp. xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = c$

26. $\left(x^2y^3 - \frac{1}{1+9x^2}\right)\frac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$ $\qquad Resp. x^3y^3 - \tan^{-1} 3x = c$

27. $(tan\,x - senx\ seny)dx + cos\,x\,cos\,y\ \ dy = 0$ $\qquad Resp. ln|\cos x| + \cos x\ sen\ y = c$

Resuelva las ecuaciones diferenciales exactas y reducibles a ellas.

28. $-xsinydy-(5x-5xcosy)dx=0$ $\quad$ $Resp.\ 1-cosy=Ce^{-5x}$

29. $cos\theta dr-\left(rsin\theta-e^{\theta}\right)d\theta$ $\quad$ $Resp.\ rcos\theta+e^{\theta}=C$

30. $(2y^2+3xy-2y+6x)dx+(x^2+2xy-x)dy=0$ $\quad$ $Resp.\ x^2y^2+x^3y-x^2y+2x^3=C$

31. $(x^2+y^2+1)dx+(x^2-2xy)dy=0$ $\quad$ $Resp.\ x-\frac{y^2}{x}-\frac{1}{x}+y=C$

32. $xdx+(x^2y+4y)dy=0;\ para\ \ y(4)=0$ $\quad$ $Resp. e^{y^2}(x^2+4)=20$

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

33. Si la solución general de la ecuación diferencial $y'+P_{(x)}y=Q_{(x)}$ es: $y_{(x)}=Ce^{\frac{sin2x}{2}}-1$, determine las funciones $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$

34. $(x+1)\frac{dy}{dx}(x+2)y=2xe^{-x}$ $\quad$ $Resp.\ \ (x+1)e^xy=x^2+c$

35. $xy'+y=e^x;\ \ y_{(1)}=2$ $\quad$ $Resp.\ \ y=\frac{e^x}{x}+\frac{2-e}{x}$

36. $(x+1)\frac{dy}{dx}+y=\ln x\ ;\ y_{(0)}=10$ $\quad$ $Resp.\ \ (x+1)y=x\ln x-x+21$

37. $\frac{1}{\sqrt{x}}y'+\sqrt{x}y=\sqrt{x}\sqrt{1-e^{\frac{x^2}{2}}}$ $\quad$ $Resp.\ \ y=e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C-\frac{2}{3}\left(1-e^{\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$

38. $y'=ytanx+senx;\ \ y_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}$ $\quad$ $Resp.\ \ y=\frac{3}{4}secx+secx\frac{sin^2x}{2}$

Resuelva las ecuaciones Bernoulli

39. $y'=\frac{4x^3}{x^4+y^2}$ $\quad$ $Resp.\ \ x^4=y^2+cy$

40. $x^3dy+3x^2dx=2cosydy$ $\quad$ $Resp.\ \ x^3=siny+cosy+ce^{-y}$

41. $xy'+y=y^2lnx$ $\quad$ $Resp.\ \ y(1+lnx+cx)=1$

42. $x'+\frac{t+1}{2t}x=\frac{t+1}{xt}$ $\quad$ $Resp.\ \ x^2=\frac{4+e^{-t}c}{2}$

43. $y'=\frac{y^3}{1-2xy^2}\ ;\ \ y_{(0)}=1$ $\quad$ $Resp.\ \ xy^2-lny=0$

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

44. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta con una rapidez proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento t. Si la población se duplico en cinco años, ¿en cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará?

Resp. $7.9\ años$; $10\ años$

45. La población de una comunidad crece a razón proporcional a la población en cualquier momento t. Su población inicial es de 500 y aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población en 30 años?

Resp. $760\ hab$.

46. Al inicio había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Al cabo de 6 horas, esa cantidad disminuyó 3%. Si la rapidez de desintegración en cualquier tiempo t, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente, calcule la vida media de dicha sustancia.

Resp. $136.5\ hr$.

47. Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es $70°\ F$ y se lleva al exterior, donde la temperatura es $10°\ F$. Después de $1/_2$ minuto el termómetro indica $20°\ F$. ¿Cuál es la lectura cuando $t = 1\ min$? ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a $15°\ F$?

Resp. $36.76°$; $3.06\ min$.

48. Si una barra metálica pequeña, cuya temperatura inicial es de $20°\ C$, se deja caer en un recipiente con agua hirviente, ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar 90° C si se sabe que su temperatura aumentó 2° C en un segundo? ¿cuánto tiempo tardará en llegar a $98°\ C$?

Resp. $82.1\ seg.$; $145.7\ seg.$

49. Un tanque tiene $500\ galones$ de agua pura y le entra salmuera con $2\ libras$ de sal por galón a razón de $5\ gal/min$. El tanque está bien mezclado, y de él sale la solución con la misma rapidez. Determine la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque en cualquier instante t. ¿Cuál es la concentración de la solución en el tanque cuando t=5 min?

Resp. $0.0975\ lb/gal$.

50. Un tanque está parcialmente lleno con 100 galones de salmuera, con $10\ lb$ de sal disuelta. Le entra salmuera con $\frac{1}{2}\ lb$ de sal por galón a razón de $6\ gal/min$. El contenido del tanque está bien mezclado y de él sale a razón de $4\ gal/min$ de solución. Calcule la cantidad de libras de sal que hay en el tanque a los 30 minutos. Resp. $64.38\ lb$.

51. Se aplica una fuerza electromotriz de $30\ volts$ a un circuito en serie LR con $0.1\ henry$ de inductancia y $50\ ohms$ de resistencia. Determine la corriente i(t), si $i(0) = 0$. Halle la corriente cuando t → ∞.

Resp. $i \to 3/5$

52. Se aplica una fuerza electromotriz de 100 volts a un circuito en serie RC, donde la resistencia es 200 ohms y la capacitancia es 10^{-4} farads. Determine la carga q(t) del capacitor si q(0)=0. Halle la corriente i(t).

Resp. $i(t) = 1/2\ e^{-50t}$

53. El modelo demográfico $P(t)$ de un suburbio en una gran ciudad esta descrito con el problema de valor inicial:

$$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P), \qquad P(0) = 5000,$$

Donde t se expresa en meses. ¿Cuál es el valor del límite de la población? ¿Cuándo igualará la población la mitad de ese valor límite? Resp. 1000000; $5.29\ meses$

54. La razón de enfriamiento de un cuerpo, es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente. Si una cierta barra de acero tiene una temperatura de 1230° y se enfría a 1030° en 10 minutos, cuando la temperatura del ambiente es de 30° ¿cuál es la expresión de la temperatura de la barra en función del tiempo?

Rpta. $T(t) = 30 + 1200\left(\frac{10}{12}\right)^{\frac{t}{10}}$

55. Hallar las trayectorias ortogonales

$$y = x * tg\left(\frac{1}{2}(y + k)\right)$$

Rpta. $x^2 + y^2 = ce^x$

56. Hallar las trayectorias ortogonales a:

$$y = tgx + c$$

Rpta. $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}sen2x + k$

57. Hallar las trayectorias ortogonales a:

$$x^2 - 2xy - y^2 = k$$

Rpta. $y^2 = 2(c - senx)$

GUIA DE PRÁCTICAS
ECUACIONES DIFERENCIALES SEGUNDO PARCIAL
MATERIA: ECUACIONES DIFERENCIALES

Comprobar si los conjuntos de funciones son linealmente independientes

1. $f_1(x) = 1 + x, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2$ $\qquad Resp. Independiente$

2. $y_1(x) = e^x, \quad y_2 = x^{ex}, \quad y_3(x) = x^2e^x$ $\qquad Resp. Independiente$

3. $y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2 = xe^{2x}, \quad y_3(x) = e^{2x}cosx$ $\qquad Resp. Independiente$

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior, homogéneas:

4. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ Rpta. $y = e^{2x}(c_1x + c_2)$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$ Rpta. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left[c_1\,cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\,sen\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

6. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ Rpta. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$

7. $y''' - y'' + y' - y = 0$ Rpta. $y = c_1e^x + c_2\cos x + c_3\,sen\,x$

8. $y^{iv} - y = 0$ Rpta. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\,sen\,x$

9. $6y''' - y'' - 6y' + y = 0$ Rpta. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{x/6}$

10. $y^{vi} - y = 0$ Rpta. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left[c_3\,cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \right.$
$\left. + c_4\,sen\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + e^{-\frac{x}{2}}\left[c_5\,cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6\,sen\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

11. $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} = 0$ Rpta. $y = c_1 + (c_2 + c_3x)e^{-2x}$

12. $2\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ Rpta. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x} + c_3e^{\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x}$

13. $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$ Rpta. $y = A\cos kx + B\,sen\,kx$

14. $y^v - 3y^{iv} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0$ Rpta. $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + c_4\cos x + c_5\,sen\,x$

15. $y^{viii} + 8y^{iv} + 16y = 0$ Rpta. $y = e^x[(c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)sen] +$
$+e^{-x}[(c_5 + c_6x)\cos x + (c_7 + c_8x)\,sen\,x]$

16. $4y''' - 3y' + y = 0$ Rpta. $y = c_1e^{-x} + (c_2 + c_3x)e^{\frac{x}{2}}$

17. $y^{v} - y''' = 0$ Rpta. $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{x} - c_5 e^{-x}$

18. $y^{iv} + 2y''' - 6y'' - 16y' - 8y = 0$ Rpta. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + c_3{}^{(1+\sqrt{3})x} + c_4 e^{(1-\sqrt{3})x}$

19. $y^{iv} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$ Rpta. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x} \cos 2x + {}+c_4 e^{-x}\, sen\, 2x$

20. $y^{viii} + 8y^{iv} + 16y = 0$ Rpta. $y = e^{x}[(c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\, sen\, x] + {}+e^{-x}[(c_5 + c_6 x)\cos x + (c_7 + c_8 x)\, sen\, x]$

21. $y^{vi} + y = 0$ Rpta. $y = c_1 \cos x + c_2\, sen\, x + e^{\sqrt{3}/2x}\left(c_3 \cos\frac{x}{2} + {}+c_4\, sen\frac{x}{2}\right) + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2x}}\left(c_5 \cos\frac{x}{2} + c_6\, sen\frac{x}{2}\right)$

22. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ Rpta. $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{2x}$

23. $y'' - 12y' + 35y = 0$ Rpta. $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{7x}$

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de Variación de parámetros.

24. $y'' + y = tan^2 x$ Rpta. $y = y_h + senx * ln|secx + tanx| - \frac{sen^2 x}{2cosx} - 1$

25. $y'' - 5y' + 6y = e^{x} tghx$ Rpta. $y = y_h + e^{3x}\left[2x + \frac{1}{2}e^{-2x} - ln(e^{2x} + 1)\right] - e^{2x}[e^{-x} + 2arctg(e^{x})]$

26. $y'' - 4y' + 4y = (3x^2 + 2)e^{x}$ Rpta. $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + (3x^2 + 12x + {}+20)e^{x}$

27. $9y'' + y = sec\left(\frac{x}{3}\right)$ Rpta. $y = \left(c_1 + \frac{x}{3}\right) sen\left(\frac{x}{3}\right) + \left[c_2 + {}+ln\left(cos\frac{x}{3}\right)\right] cos\frac{x}{3}$

28. $y'' + 4 + 4y = e^{-2x}(x^2 + 4x + 4)^{-1}$ Rpta. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} - e^{-2x} ln(x + 2)$

29. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$ Rpta. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - x e^{-x}(ln\, x - 1)$

30. $y'' - 2y' + y = e^{x} arctg(x)$ Rpta. $y = e^{x}\left[C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}(x^2 - 1)arctg(x) - {}-\frac{1}{2}x ln(x^2 + 1)\right]$

31. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 2(x + 1)^2$ Rpta. $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2\, sen\, x) + x^2$

32. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$ Rpta. $y = c_1 + c_2 e^{-3x} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right)e^{-3x}$

33. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$ Rpta. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{e^{3x}}{5}(x^2 - x + 2)$

34. $4y'' - 4y' + y = (x - 1)e^{\frac{x}{2}}$ Rpta. $y = e^{\frac{x}{2}}(c_1 x + c_2) + x^2\left(\frac{x}{24} - \frac{1}{8}\right)e^{\frac{x}{2}}$

Resuelva por coeficientes indeterminados

35. $y'' - 4y' + 3y = 2\cos x + 4\ sen\, x$ Rpta. $y = c_1e^{x} + c_2e^{3x} + \cos x$

36. $y'' + y = 2\cos x,\ y(0) = 0,\ \ y'(\pi) = 0$ Rpta. $y = (c + x)\, sen\, x$

37. $y'' - 7y' + 6y = sen\, x$ Rpta. $y = c_1e^{6x} + c_2e^{x} + \frac{5\, sen\, x + 7\cos x}{74}$

38. $y^{v} + 4y''' = e^{x} + 3sen(2x) + 1$ Rpta. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos(2x) +$
$+C_5\, sen(2x) + \frac{e^x}{5} + \frac{x^3}{24} + \frac{3x}{32} sen(2x)$

39. $y''' + 4y' + 4y = e^{-2x} + 8(x + 10)$ Rpta. $y = C_1 + e^{-2x}(C_2x + C_3) + x^2 - \frac{x^2e^{-2x}}{4}$

40. $y''' - y' = (x + e^{x})^2$ Rpta. $y = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{-x} + \frac{e^{2x}}{6} - x\left(\frac{x^2}{3} + 2\right) +$
$+\frac{x}{2}(x - 3)e^{x}$

41. $y''' + y'' + y' + y = x\cosh(-x)$ Rpta. $y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3 sen x + \frac{e^x}{8}\left(x - \frac{3}{2}\right) +$
$+\frac{x}{8}(x + 2)e^{-x}$

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando métodos abreviados:

42. $y'' + y = 3\, sen\, 2x + x\cos x$ Rpta.$y = c_1\cos x + c_2\, sen\, x - \frac{x}{3}\cos 2x - \frac{5}{9} sen\, 2x$

43. $y'' + 9y = \cos 3x$ Rpta. $y = c_1\, sen\, 3x + c_2\cos 3x + \frac{x}{6} sen\, 3x$

44. $y'' + 2y' + y = sen\, 2x$ Rpta. $y = e^{-x}(c_1 + c_2x) - \frac{1}{25}(3\, sen\, 2x + 4\cos 2x)$

45. $y^{iv} - y = sen\, x - 2\cos x$ Rpta. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\, sen\, x +$
$+\frac{x}{4}(\cos x + 2\, sen\, x)$

46. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 4x sen x$ Rpta. $y = c_1\cos 3x + c_3\, sen\, 3x + \frac{x}{2} sen\, x - \frac{\cos x}{8}$

47. $y'' + y = 4x\cos x$ Rpta. $y = c_1\cos x + c_2\, sen\, x + x^2\, sen\, x + x\cos x$

48. $y'' + y = -9\cos 2x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$ Rpta. $y = sen\, x - \cos x + 3\cos 2x$

49. $y'' + 2y' + 2y = 2\, sen\, 2x - 4\cos 2x,$
$y(0) = 0,\ \ y' = 0$ Rpta. $y = 2e^{-x}\, sen\, x + sen\, 2x$

50. $y'' + y = 2\cos x$ Rpta. $y = c_1\, sen\, x + c_2\cos x + x\, sen\, x$

51. $y'' + k^2y = sen(bx),\ \ k \neq b$ Rpta. $y = c_1\, sen(kx) + c_2\cos(kx) + \frac{sen(bx)}{k^2 - b^2}$

52. $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$ Rpta. $y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\, sen\, 2x) - \frac{\cos 2x}{2} -$
$2\, sen\, 2x$

Resuelve las siguientes ecuaciones de Euler

53. $x^2y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$ Rpta. $y = C_1\cos(\ln x) + C_2 sen(\ln x) - \frac{1}{2}(\ln x - 7)$

54. $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$ Rpta. $y = C_1 + C_2x^2 + C_3x^4$

55. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{y}{x^2} = 0$ Rpta. $y = x(C_1\ln x + C_2)$

56. $(2x+1)^2y''' + 2(2x+1)y'' + y' = 0$ Rpta. $y = C_1 + C_2(2x+1)\cos\left(\frac{\ln(2x+1)}{2}\right) + C_3(2x+1)sen\left(\frac{\ln(2x+1)}{2}\right)$

57. $y''' + \frac{3y''}{x} + \frac{y'}{x^2} + \frac{y}{x^3} = 0$ Rpta. $y = C_1x^{-1} + x^{\frac{1}{2}}\left[C_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + C_3 sen\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right]$

58. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$ Rpta. $y = C_1x + C_2x^2 + 1 + (x^2 + 2x)\ln x$

59. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^2} = x\ln x$ Rpta. $y = C_1x + C_2x^2 + \frac{x^3}{2}(\ln(x)) - \frac{3}{4}x^3$

60. $(1+x)^2y'' + 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^2$ Rpta. $y = (1+x)^2[C_1 + C_2\ln(1+x)] + (1+x)^2$

61. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = cosx + \frac{1}{x}$ Rpta. $y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} - \frac{cosx}{x^2} - \frac{\ln x}{x}$

62. $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3$ Rpta. $y = (C_1 + C_2\ln x)x + C_3x^2 + \frac{x^3}{3}$

Resolver los siguientes problemas de aplicaciones diferenciales de segundo orden

63. Al extremo inferior de un muelle espiral suspendido del techo se liga un peso de 4 lbs. El peso queda en su posición de equilibrio en la que el muelle está alargado 6 pulgadas. En el instante $t = 0$ seg. se golpea el peso de modo que se pone en movimiento con una velocidad inicial de 2 pie/seg. Dirigida hacia abajo.

a) Determinar el desplazamiento resultante y la velocidad del peso en función del tiempo.

b) Hallar la amplitud, período y frecuencia del movimiento.

c) Determinar los instantes en los que el peso se encuentra 1.5 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y moviéndose hacia abajo.

d) Determinar los instantes en que se encuentra 1.5 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio y movimiento hacia arriba.

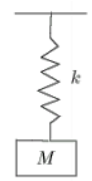
Rpta. $a)\quad x = -\frac{sen8t}{4}$, $b)\ \frac{1}{4}\ pies;\ \frac{\pi}{4}\ seg,\quad \frac{4}{\pi}\ oscilaciones\ /seg$

$c)\quad t = \frac{\pi}{48} + \frac{n\pi}{4}\ \ (n = 0,1,2,3\ \ldots\ldots)$, $d)\ t = \frac{5\pi}{48} + \frac{n\pi}{4}\quad (n = 0,1,2,3\ \ldots\ldots)$

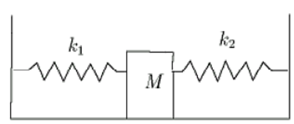
64. De un resorte vertical cuya constante de rigidez es igual a 300 Kg/m. se suspende un peso de 118 Kg. Si el peso se levanta 76.6 mm. sobre su posición de equilibrio y luego se le suelta. Calcular el instante en que el peso se halla a 38.3 mm. debajo de su posición de equilibrio y moviéndose hacia abajo. Halle también la amplitud, período y frecuencia del movimiento.

Rpta. $a)$ $\quad x = 7{,}66sen\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right)$, $\;amplitud\;\; 7{,}66\,cm,\;\; Periodo\;\; \frac{2\pi}{5}$, $frecuencia\;\; \frac{5}{2\pi}\; ciclos/seg$

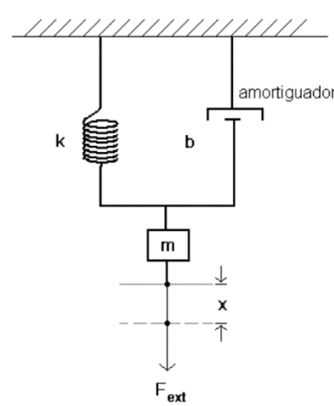
65. De un resorte elástico pegado al techo pende una masa de 3Kg como muestra la figura siguiente. Si en estado de equilibrio el muelle se estira 1 m. respecto de su longitud inicial y suponemos nulo el efecto del rozamiento del aire,
a) describir el movimiento descrito por el cuerpo producido al separarlo 1 m. respecto de su posición de equilibrio.
b) Si el muelle se introduce en un líquido que produce una fuerza de frenado proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad c = 1, determinar ahora la ecuación del movimiento.
c) Determinar la ecuación del movimiento en el caso en que se aplica al cuerpo una fuerza externa $f(t) = cos(t)$



66. Consideremos el cuerpo de la figura siguiente. Si la masa del cuerpo es M y las constantes de restauración de cada muelle son *k1 y k2* y suponemos el cuerpo libre de rozamiento, determinar la ecuación de movimiento cuando desplazamos el cuerpo x0 cm. de su posición de equilibrio (suponemos despreciable la fuerza de rozamiento del cuerpo con la superficie).

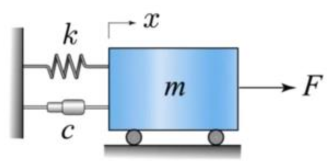


67. Hallar la posición de la masa en el tiempo $t = 4\;seg,$ si actúa la acción externa $f(t) = cos(2t)$, $m = 1, b = 4, k = 20, \qquad x(0) = 2, x'(0) = 0.\;\; Rpta.\;\; x = -0.26$

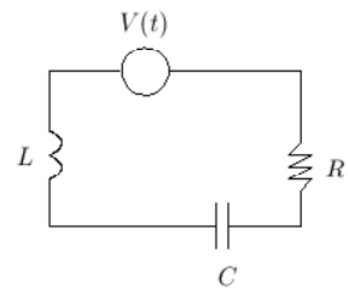


68. Hallar la posición de la masa en el tiempo t=4 seg, si actúa la acción externa $f(t) = sen(3t)$, $m = 1, C = 4, k = 13,\quad x(0) = 1, x'(0) = 0.$

Rpta. $x = -0{,}088$



Consideremos el circuito eléctrico de la figura. Calcular la ecuación de carga y la ecuación de la intensidad de corriente que pasa por los cables de dicho circuito en los siguientes casos, suponiendo que el circuito está descargado (i(0) = 0, q(0) = 0):



69. $C = 1F;\ R = 1\Omega;\ L = 0H;\ V(t) = sint.$
70. $C = 1F;\ R = 2\Omega;\ L = 0H;\ V(t) = e^{t}cos(2t).$
71. $C = 2F;\ R = 3\Omega;\ L = 1H;\ V(t) = e^{3t}sen(t)$
72. $C = 1F;\ R = 1\Omega;\ L = 1H;\ V(t) = sint$
73. $C = 0.5F;\ R = 1\Omega;\ L = 1H;\ V(t) = t^{2}$
74. $C = 0.25F;\ R = 4\Omega;\ L = 2H;\ V(t) = -tcost.$

PRÁCTICA III
EXAMEN FINAL
MATERIA: ECUACIONES DIFERENCIALES

UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE, RESOLVER:

1. $ty''(t) - (4t+1)y'(t) + 2(2t+1)y(t) = 0, \quad y_{(0)} = 0$

$Resp. \quad y(t) = \frac{t^2}{2}e^{2t}$

2. $ty'' + aty' = 0\,; \; y_{(0)} = 0, \; y'_{(0)} = 2$

$Resp. \quad \frac{2}{a}(1 - e^{-at})$

3. $\mathrm{y}^{(4)} - y = 0\,; \; y_{(0)} = 1, \; y'_{(0)} = 0, \quad y''_{(0)} = 2, \; y'''_{(0)} = 0$

$Resp. \quad \frac{3}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}cos(t)$

4. $y'' + \omega^2\, y = \cos(2t)\,; \; \omega^2 \neq 4, \quad y_{(0)} = 1, \; y'_{(0)} = 0$

$Resp. \quad \left(\frac{\omega^2-5}{\omega^2-4}\right)cos(\omega t) + \left(\frac{1}{\omega^2-4}\right)cos(2t)$

5. $y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0\,; \quad y_{(0)} = 0, \; y'_{(0)} = 1$

$Resp. \quad y(t) = t$

6. $ty''(t) + (-t-1)y'(t) + 2y(t) = t - 1, \quad y_{(0)} = 0, \; y'(0) = 1$

$Resp. \quad y(t) = t$

7. $y''(t) - y(t) = 5\,\mathrm{sen}\,2t, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$

$Resp. \quad y(t) = 3\,senht - sen\,2t$

8. $x'(t) + 3x(t) = e^{-2t}\;, \quad x(0) = 0$

$Resp. \quad x(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$

9. $ty''(t) + 2\,y'(t) + ty\,(t) = 0\;, \quad y(0) = 1 \;, y(\pi) = 0$

$Resp. \quad y\,(t) = \frac{sen\,t}{t}$

10. Una masa de $10kg$ se sujeta al extremo libre de un resorte que pende de una viga, alargándolo $0{,}1\,m$. De esta posición se le desplaza hacia abajo $0{,}05m$ y se imprime una velocidad de $0{,}1\,m/seg$ hacia arriba. Además, se le aplica un amortiguamiento con coeficiente $160\;kg/seg$.

a) Establecer y resolver la ecuación diferencial que corresponde al movimiento generado utilizando los datos dados.

b) Reescribir la solución obtenida en (a) en la forma alternativa $x(t) = Ae^{at}\cos(\omega t - b)$

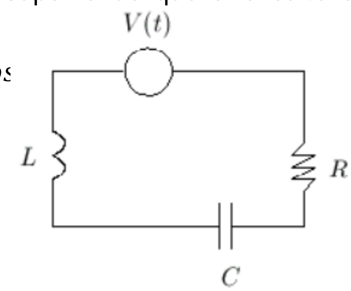
c) Encontrar los tiempos para los que la velocidad es cero las dos primeras veces después de iniciado el movimiento

11. Una masa de $\frac{1}{7}\,kg$ alarga un resorte en $0{,}2\,m$. La masa se coloca a $0{,}1\,m$ por arriba del punto de equilibrio y luego inicia el descenso con una velocidad positiva de $0{,}5\,m/s$. El movimiento se efectúa en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\frac{8}{5}$ veces la velocidad instantánea en todo momento. Encuentre la ecuación que describe la posición de la masa en el instante t.

Rpta. $x(t) = -\frac{1}{10}\left[\cos\left(\frac{21}{5}t\right) + \frac{1}{7}sen\left(\frac{21}{5}t\right)\right]e^{-\frac{28}{5}t}\ \ (m)$

12. Consideremos el circuito eléctrico de la figura. Calcular la ecuación de carga y la ecuación de la intensidad de corriente que pasa por los cables de dicho circuito, suponiendo que el circuito está descargado $(i(0)\ =\ 0, q(0)\ =\ 0)$:

$$C\ =\ 1F;\ R\ =\ 2\Omega;\ L\ =\ 0H;\ V\ (t)\ =\ e^t cos$$



13. Calcular la ecuación de carga y la ecuación de la intensidad de corriente que pasa por los cables de un circuito RLC, suponiendo que el circuito está descargado $(i(0)\ =\ 0, q(0)\ =\ 0)$:

$$C\ =\ 0.25F;\ R\ =\ 4\Omega;\ L\ =\ 2H;\ V\ (t)\ =\ -t\ cost$$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + t \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2t \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y + t + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + t - 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' + y' - x = 5 \\ x' + y' + y = 1 \end{cases}$ *Rta.* $\begin{cases} x(t) = -5 \\ y(t) = 1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x'' + x' + y' + y = 0 \\ x''' + y'' + y = 0 \end{cases}$ *Rta.* $\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{2}C_2e^{-t} \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + 3y - z \end{cases}$ *Rta.* $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^t cost + C_3e^t sent \\ y = (C_2 + C_3)e^t cost + (C_3 - C_2)e^t cost \\ z = C_1e^{2t} + 3C_2e^t cost + 3C_3e^t sent \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t \end{cases}$

20. $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = -5x \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = x - y + 1 \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = x - y + 2 \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = sen(t) \\ x + \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = x \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + z \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + y \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2x = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - x - y = sent \end{cases}$$

Rta.
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}cost - \frac{1}{4}sent + Ce^t \\ y(t) = -\frac{3}{4}cost - \frac{1}{4}sent - 3Ce^t \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = \sec(t) \\ x + \dfrac{dy}{dt} = 1 \end{cases}$$

Rta. $$\begin{cases} x(t) = C_1cost + C_2sent + sen(t)ln(sect) + (t - tant)cost + 1 \\ y(t) = -(C_1 + t - 2tant)sent + (C_2 + ln|sect| + 1)cost - 2sect \end{cases}$$

RESOLVER UTILIZANDO OPERADORES DIFERENCIALES

27. $$\begin{bmatrix} D^2 + 1 & 3 \\ 5 & D^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$Rpta: \begin{cases} x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3\cos(2t) + C_4sen2t + \frac{3}{4}tC_2e^{-2t} \\ y(t) = -\frac{5}{3}C_1e^{2t} - \frac{5}{3}C_2e^{-2t} + C_3cos2t + C_4sen2t - \frac{5}{4}te^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-2t} \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} x'' - 4y' = 0 \\ x'' + x' + y'' = 0 \end{cases}$$

$$Rpta: \begin{cases} x(t) = C_1 + C_2e^{-2t} + C_3te^{-2t} \\ y(t) = -\frac{1}{2}C_2e^{-2t} - \frac{1}{2}C_3te^{-2t} + \frac{1}{4}C_3e^{-2t} + C_4 \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} x' - 2x + 2y' = 2 - 4e^{2t} \\ 2x' - 3x + 3y' - y = 0 \end{cases}$$

30. $$\begin{bmatrix} D - 1 & D + 3 \\ D + 2 & D + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - 1 \\ e^{2t} + t \end{bmatrix}$$

31. $$\begin{bmatrix} D + 1 & 2D + 7 \\ -2 & D + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t + 2 \\ e^t - 1 \end{bmatrix}$$

32. $\begin{cases} 2x' = 6x - y - 6t^2 - t + 3 \\ y' = 2y - 2t - 1 \end{cases}; \begin{matrix} x(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{matrix}$

33. $\begin{cases} x' = y \\ x' - y' = x + y \end{cases}; \begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{matrix}$

34. $\begin{bmatrix} D & -D-1 \\ 1 & D-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}; \begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{matrix};$ *Resp.* $\begin{cases} x(t) = \frac{7}{5}cost - \frac{6}{5}sent - e^{-t} + \frac{3}{5}e^{2t} \\ y(t) = \frac{1}{10}cost - \frac{13}{10}sent - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{2t} \end{cases}$

35. $\begin{cases} x' - 2y' = 4t \\ y' + 2y - 4x = -4t - 2 \end{cases}; \begin{matrix} x(0) = 4 \\ y(0) = -5 \end{matrix}$ *Resp.* $\begin{cases} x(t) = 3e^{-4t} + e^{2t} \\ y(t) = -6e^{-4t} + e^{2t} - 2t \end{cases}$

36. $\begin{cases} x' - 3x + 2y = sent \\ 4x - y' - y = cost \end{cases}; \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{matrix}$

Resp. $\begin{cases} x(t) = -\frac{3}{40}e^{-t}\cos 2t + \frac{11}{20}e^{-t}sen2t - \frac{1}{10}sent + \frac{7}{10}cost \\ y(t) = -\frac{3}{10}e^{-t}\,sens\,2t - \frac{11}{10}e^{-t}cos2t + \frac{11}{10}cost + \frac{7}{10}sent \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x' - 2x + y' - y = 3t \\ x' + x + y' + y = 1 \end{cases}; \begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 3 \end{matrix}$ *Resp.* $\begin{cases} x(t) = t - 2e^{-3t} + 3e^{-t} \\ y(t) = 1 - t + 2e^{-3t} \end{cases}$

38. $\begin{cases} x'' + y' + 3x = 15e^{t} \\ y'' - 4x' + 3y = 15sen2t \end{cases}; \begin{matrix} x(0) = 35, x'(0) = -48 \\ y(0) = 27, y'(0) = -55 \end{matrix}$

Resp. $\begin{cases} x(t) = 3cost - 15sen3t + 3e^{-t} + 2cos2t \\ y(t) = 30cost - 60sent + 3e^{-t} + sen2t \end{cases}$

39. $\begin{cases} x'' - x + 5y' = t \\ y'' - 4y - 2x' = -2 \end{cases}; \begin{matrix} x(0) = 0, x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{matrix}$ *Resp.* $\begin{cases} x(t) = -t + 5sent - 2sen2t \\ y(t) = t - 2cost + cos2t \end{cases}$

40. $\begin{cases} x'' + 2x - y' = 2t + 5 \\ x' - x + y' + y = -2t - 1 \end{cases}; \begin{matrix} x(0) = 3, x'(0) = 0 \\ y(0) = -3 \end{matrix}$

Resp. $\begin{cases} x(t) = 2 + t + e^{-2t} + sent \\ y(t) = 1 - t - 3e^{-2t}cost \end{cases}$

41. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x - y = 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 0 \end{cases}; \begin{matrix} x(0) = 0, x'(0) = 0 \\ y(0) = -1 \end{matrix}$ *Resp.* $\begin{cases} x(t) = 2e^{t} - e^{-t} - 1 \\ y(t) = e^{t} - 2 \end{cases}$

42. $\begin{cases} y' + y + 2z' + 3z = e^{-t} \\ 3y' - y + 4z' + z = 0 \end{cases}; \begin{matrix} z'(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{matrix}$ *Resp.* $\begin{cases} y(t) = 5e^{t} - 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ z(t) = e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t} \end{cases}$

43. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y = 0 \end{cases}; \begin{matrix} x(0) = -1 \\ y(0) = 2 \end{matrix}$ *Resp.* $\begin{cases} x(t) = -3cos3t - \frac{5}{3}sen3t \\ y(t) = 1 - t - 3e^{-2t}cost \end{cases}$

44. $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = t^2 \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4t \end{cases} ; \quad \begin{matrix} x(0) = 8, x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0 \end{matrix}$$

Resp. $$\begin{cases} x(t) = 8 + \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{1}{24}t^4 \\ y(t) = -\dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{1}{24}t^4 \end{cases}$$

45. $$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0 \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + 3y = te^{-t} \end{cases} ; \quad \begin{matrix} x(0) = 0, x'(0) = 2 \\ y(0) = 0 \end{matrix}$$

Resp. $$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}t^2 + t + 1 - e^{-t} \\ y(t) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{1}{3}te^{-t} \end{cases}$$