GUÍA DE EJERCICIOS CÁLCULO I

Por: Daniel Lima Marquez

2021

1. INECUACIONES

En cada uno de los ejercicios hallar el conjunto solución.

1. $2x+16>10x+8>5x-2$ Rpta. $(-2,1)$
2. $\dfrac{2x}{3a}+4>\dfrac{5x}{6b}+2x,\ a>b>0$ Rpta. $(-\infty,\frac{24ab}{5a+12ab-4b})$
3. $(x^2+2x)(x^2-1)-24>0$ Rpta.$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$
4. $x(x-3)(x-1)(x+2)>16$ Rpta. $(-\infty,\frac{1-\sqrt{33}}{2})\cup(\frac{1+\sqrt{33}}{2},+\infty)$
5. $2x^3+3x^2-11x-6\geq 0$ Rpta.$[-3,-1/2]\cup[2,+\infty)$
6. $x^4-4x^3-x^2+16x-12>0$ Rpta. $(-\infty,-2)\cup(1,2)\cup(3,+\infty)$
7. $x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12>0$ Rpta. $(-3,-2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$
8. $(6x+3)^2(x^2-1)^3(3x-5)^7<0$ Rpta. $(-\infty,-1)\cup(1,5/3)$
9. $(3-x)^3(x^2-1)^2(1-x)^5x>0$ Rpta. $(0,1)\cup(3,+\infty)\cup\{-1\}$
10. $x^4<x^2$ Rpta.10 $(-1,1)-\{0\}$
11. $\left(x^2-1\right)\left(x^2+9\right)(x+4)(x-5)>0$ Rpta. $(-\infty,-4)\cup(-1,1)\cup(5,+\infty)$
12. $x^4-2x^2+8x-3>0$ Rpta. $(-\infty,-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2},+\infty)$
13. $x^4-2x^3-5x^2+10x-3\leq 0$ Rpta. $\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$
14. $(x-7)(x-3)(x+5)(x+1)\geq 1680$ Rpta. $(-\infty,-7]\cup(9,+\infty]$
15. $(x+9)(x-3)(x-7)(x+5)\leq 385$ Rpta. $\left[-1-\sqrt{71},-4\right]\cup\left[2,-1+\sqrt{71}\right]$
16. $4x(x-3)+(x+2)(x-2)>(2x+3)^2+x-1$ Rpta. $(-\infty,-3)\cup(4,+\infty)$
17. $\dfrac{(x-2)^2}{2}+\dfrac{5x+6}{6}<\dfrac{x^2-9}{3}+6$ Rpta. $(0,7)$

En cada uno de los ejercicios hallar el conjunto solución

Por: Daniel Lima M.

16. $\dfrac{x+1}{2-x} < \dfrac{x}{x+3}$ Rpta. $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$

17. $\dfrac{1}{3x-7} \geq \dfrac{4}{3-2x}$ Rpta. $(3/2,2)\cup(7/3,+\infty)$

18. $\dfrac{x+2}{x-2} \geq \dfrac{x^2+2}{x^2}$ Rpta. $(2,+\infty)$

19. $\dfrac{x-1}{x} \leq \dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1}$ Rpta. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

20. $\dfrac{x^2+2}{x^4+1} > \dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ Rpta. $\forall,\ x\epsilon\mathbb{R}$

21. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{3x+1}{x} < 4$ Rpta. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

22. $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{2x^2-3x+3}{(x-2)(2x+3)}$ Rpta. $(-\infty,-3/2)\cup(0,7/6)\cup(2,+\infty)$

23. $\dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{3x-1}{x+2} < 4 + \dfrac{x-7}{x-1}$ Rpta. $(-2,-5/4)\cup(-1,1)\cup(5,+\infty)$

24. $\dfrac{(x^2-2)(x+5)(x-3)}{x(x^2+2)(x+3)} > 0$ Rpta. $(-\infty,-5)\cup(-3,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})\cup(3,+\infty)$

25. $\dfrac{(6x+3)^2(x^2+1)^3(3x-5)^7}{(x+6)^4(2x+3)^{17}} > 0$ Rpta. $(-\infty,-6)\cup(-6,-3/2)\cup(5/3,+\infty)$

26. $\dfrac{(4x+2)^2(x^2+2)^5(2x-8)^9}{(x+1)^2(2x+5)^{13}} < 0$ Rpta. $(-5/2,4)-\{-1,-1/2\}$

27. $\dfrac{7}{x-4} + \dfrac{1}{x+2} > -2$ Rpta. $(-\infty-3)\cup(-2,1)\cup(4,+\infty)$

28. $\dfrac{(x^2+x-6)(x^2-x-6)}{(x^2-4)(x^2-2)} > 0$ Rpta. $(-\infty,-3)\cup(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup(3,+\infty)$

29. $\dfrac{5}{x+3} + \dfrac{1}{x-1} > 2$ Rpta. $(-3,-1)\cup(1,2)$

30. $2 \geq \dfrac{3x+1}{x} > \dfrac{1}{x}$ Rpta. $[-1,0)$

31. $\dfrac{2x-1}{x+4} + \dfrac{x+2}{3-x} > \dfrac{x-1}{x+3}$ Rpta. $(-\infty,-4)\cup(-3,3)$

32. $\dfrac{1+x^3}{(1-x^2)(1-x)} > \dfrac{x-x^2+x^4-x^5}{(1-x)^2(1+x)} + 9$ Rpta.
$(-\infty,-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3},1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

33. $\dfrac{(x-3)(x+2)^2(x+1)(x-4)}{x(x+2)(x^2-3)(x+3)(x^2+4)} \geq 0$ Rpta.

34. $\dfrac{2x-25}{2(x^2+2x-3)} + \dfrac{2x+11}{2(x^2-1)} > \dfrac{1}{x+3}$ Rpta. $(-3,-1) \cup (1,+\infty)$

35. $\dfrac{(2x^2-8x+8)(x+3)}{x+6} \geq 0$ Rpta. $(-\infty,-6) \cup [-3,+\infty)$

36. $\dfrac{2+x-x^2}{x^2-2x+1} \geq 0$ Rpta. $[-1,1) \cup (1,2]$

37. $\dfrac{x^2+8x-12-x^3}{7x-x^2-6} \geq 0$ Rpta. $(-3,1) \cup (6,+\infty) \cup \{2\}$

39. $\dfrac{x+1}{1-x} - 2 > \dfrac{1-x}{x}$ Rpta. $(-\infty,-1) \cup (0,1/2) \cup (1,+\infty)$

40. $\dfrac{7}{x-4} + \dfrac{30}{x+2} \leq \dfrac{7}{x+1}$ Rpta. $(-\infty,-2) \cup (-1,-2/3) \cup (5/2,4)$

41. $\dfrac{3x^2+7x-6}{x^2-x-6} > \dfrac{3x^2+16x-12}{x^2-4x-12}$ Rpta

42. $\dfrac{2x}{2x^2+7x+5} > \dfrac{x}{x^2+6x+5}$ Rpta

En cada uno de los ejercicios hallar el conjunto solución.

43. $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 4$ Rpta. $(-\infty,10/9) \cup (2,+\infty)$

44. $\left|\dfrac{6-5x}{3+x}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ Rpta. $[9/11,5/3]$

45. $\left|4+\dfrac{1}{x}\right| < 5$ Rpta. $(-\infty,-1/9) \cup (1,+\infty)$

46. $\left|\dfrac{x^2+3x+11}{x-2}\right| \leq 3$ Rpta. $[5,1]$

47. $\dfrac{4-|4-x|}{|x|+4} < 0$ Rpta. $(-\infty,0) \cup (8,+\infty)$

48. $\left|\dfrac{6x-4}{3+x}\right| \geq \dfrac{1}{2}$ Rpta.

49. $\left|\dfrac{x+3}{6-2x}\right| \geq \dfrac{1}{2}$ Rpta. $[0,3)\cup(3,+\infty)$

50. $\left|\dfrac{3x^2-1}{x-2}\right| > -6$ Rpta. $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

51. $\left|x^2-4\right| < -2x+4$ Rpta. $(-4,0)$

52. $\dfrac{|3x-1|+2x}{|x+1|-3x} \geq 0$ Rpta. $(-4,0)$

53. $\left|\dfrac{x-2}{x+4}\right| \leq \dfrac{x+3}{x-6}$ Rpta. $(6,+\infty)$

54. $\left|4x^2-8x+4x\right| \leq 4x+10$ Rpta. $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

55. $\left|x^2-4\right| > -2x+4$ Rpta. $(-\infty,-4)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$

56. $|3x+8| \geq 8x-3$ Rpta. $(-\infty,11/5]$

57. $\left|\dfrac{x}{2}\right|^2 + 3\left|\dfrac{x}{2}\right| \leq \dfrac{7}{4}$ Rpta. $[-1,1]$

58. $||x|+2| \leq \left|x^2\right|$ Rpta. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

59. $|x-2|^2 - 3|x-2| - 4 < 0$ Rpta. $(-2,6)$

60. $|2x-5|^2 - |x-2| - |x|^2 \geq 7$ Rpta. $\left(-\infty,-\sqrt{6}\right]\cup\left[2\sqrt{2},+\infty\right)$

61. $\left|2x^2-4x-6\right| \geq \left|2x^2-3x-9\right|$ Rpta. $(-\infty,5/4)\cup\{3\}$

62. $\left|\dfrac{6-5x}{3+x}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ Rpta. $[9/11,5/3]$

63. $\left|\dfrac{1}{6-3x}\right| \leq \left|\dfrac{2}{6-3x}\right|$ Rpta. $\left(-\infty,\frac{15}{7}-\frac{3\sqrt{30}}{35}\right]\cup\left[\frac{25}{7},\frac{3\sqrt{30}}{35}\right]$

64. $\left|\dfrac{x}{1-|x|}\right| > \dfrac{1}{x}$ Rpta. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)\cup(1,+\infty)$

65. $\dfrac{|x|^3-4x^2+20}{|x|+1} \geq 4$ Rpta. $(-\infty,-4]\cup[-2,2]\cup[4,+\infty)$

66. $27^{x-1} < 9^{x+3}$ Rpta. $(1/4, +\infty)$

67. $2^{5x+8} < 16^{x+5}$ Rpta. $(-\infty, 12)$

68. $\dfrac{3^{2x-3}3^{4-x}}{3^{5x-1}} > 3^{(2x+1)(x-2)}$ Rpta. $(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4})$

69. $\dfrac{9^{3-x}}{9^{x+3}3} < 9^{(x-1)^2}$ Rpta. $\mathbb{R}$

70. $\sqrt[x+1]{8^{x+3}} < \sqrt[x-1]{32^{2x+5}}$ Rpta. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

71. $\sqrt{27^{x+1}} < \sqrt[3]{9^{x-3}}$ Rpta. $(-\infty, -21/5)$

72. $\sqrt{81^{x+15}} < \sqrt{243^{x-10}}$ Rpta. $(110, +\infty)$

73. $\dfrac{729^{x^2}243^{x}}{81^{2x}} > \dfrac{243^{6}27^{5x-6}}{27^{4x}}$ Rpta. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

74. $3^{x^2}3^{2x} > 27$ Rpta. $(1, +\infty)$

75. $2^{\frac{x-5}{2}} > 8^{\frac{x-9}{3}}$ Rpta. $(-\infty, 12)$

76. $4^{\frac{10}{x^2-1}} > (64)^{\frac{1}{x-1}}$ Rpta. $(-\infty, -1) \cup (1, 7/3)$

77. $\sqrt[x+3]{\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-3}} \leq \sqrt[x+2]{(0,2)^{2x-2}}$ Rpta. $(43/94, +\infty)$

78. $\sqrt[x-5]{4^{x-4}} \geq \sqrt[x+1]{2^{2x}}$ Rpta. $(-1, 2] \cup (5, +\infty)$

79. $\left(\dfrac{2}{250}\right)^{x}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{4x^2+1} \leq \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+2}\left(\dfrac{1}{625}\right)^{x^2-3x}$ Rpta. $(-\infty, -2) \cup (-1/2, +\infty)$

80. $\sqrt[x-3]{3^{x}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}} \leq \sqrt[x+2]{9\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x}}$ Rpta. $(-3, 3)$

81. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-4}}+\sqrt{x^2-2x-4}>2$ Rpta. $(-\infty,1-\sqrt{5})\cup(1+\sqrt{5},+\infty)-\{1\pm\sqrt{6}\}$

82. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}<5$ Rpta. $[0,4)$

83. $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}<\sqrt{2}$ Rpta. $[1/2,1)$

84. $\sqrt{x}-9\sqrt[4]{x}+118\geq 0$ Rpta. $[0,+\infty)$

85. $x+2<\sqrt[3]{x^3+8}$ Rpta. $(-2,0)$

86. $\sqrt{x-4}-\sqrt{8-x}\geq 1$ Rpta.$[4,\dfrac{\sqrt{7}+12}{2}]$

87. $\sqrt{x^2-1}<\sqrt{x+1}$ Rpta. $[1,2)$

88.$\sqrt{2x-9}\leq 3-x$ Rpta. $\emptyset$

89.$\dfrac{(x-4)\sqrt{x^2-2x+2}}{x^2+2}$ Rpta. $(-\infty,4)$

90. $\sqrt{x^2-2x-15}\geq x+1$ Rpta. $(-\infty,-3)$

91. $\sqrt{3x-6}>-\sqrt{4x-12}$ Rpta. $(3,+\infty)$

92. $\sqrt{5x-3}-\sqrt{x-1}>0$ Rpta. $[1,+\infty)$

93. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-4}-\sqrt{x}}{x-1}$ Rpta. $[64,+\infty)$

94. $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}<\sqrt{x+1}$ Rpta. $(3,+\infty)$

95. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}>\sqrt{x+1}$ Rpta. $(11/3,5)$

96. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}\geq 0$ Rpta. $[-2,\frac{\sqrt{13}-5}{2}]$

97. $\sqrt{x^2-14x+13}\geq x-3$ Rpta. $(-\infty,3)$

98. $\dfrac{\sqrt{x^2+3x+4}}{\sqrt{21}+\sqrt{x^2-4}}\geq 0$ Rpta. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

99. $\sqrt{\dfrac{x+6}{x}}<\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$ Rpta. $(-\infty,-6]\cup(1,2)$

100. $\sqrt{\dfrac{32-2x}{x+2}}\geq\sqrt{x}$ Rpta. $[0,4]$

2. FUNCIONES

EVALUACIÓN DE FUNCIONES

1. Hallese $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ si $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

2. Sea $f(x) = Arccos(log(x))$. Hallese $f(1/10)$, $f(1)$, $f(10)$

3. Dada la funcion $f(x) = mx + b$ con $f(1) = 3$ y $f(3) = 5$ hallar los valores de las constantes m y b.

4. Determinese la función cuandratica f que tiene como todos los reales como su dominio y tal que $f(-1) = 3$, $f(2) = 0$ y $f(4) = 28$.

5. Hallar la funcion de la forma $f(x) = a + bc^x$si $f(0) = 15$, $f(2) = 30$ y $f(4) = 90$.

6. Escríbase la expresión para el área A de un trapecio Isósceles, de base mayor 2cm y base menor 1 cm, como la función del angulo φentre la base y un lado.

7. Hallar $f(x)$ si $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ Rpta.$x^2 - 2$

8. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, verificar $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = 0$

9. Si f es una función real tal que $f(x+2) = x^2 + x$, demostrar que $\dfrac{f(a+3) - f(a-3)}{2a-3} = 6$.

10. Sea f una función real de variable real definida por $f(x) = mx + b$, tal que: $2f(2) + f(4) = 21$ y $f(-3) - f(1) = -16$ probar que $\frac{1}{3}f(1) = \frac{2}{3}$.

11. Sea $f(x) = ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, demostrar que $f(x) + f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

12. Sea $f(n)$ la suma de miembros de una progresión aritmetica, demostrar que $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0$.

13. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(ax + a^{-x})$ y $g(x) = \frac{1}{2}(a - a^{-x})$, demostrar que:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(y) + g(x)g(y) \\ g(x+y) &= f(x)g(y) + f(y)g(x) \end{aligned}$$

14. Determinar una funcion polinomica de segundo grado $f(x)$ talque $f(0) = -5$, $f(-1) = 1$, $f(1) = -7$.

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Calcular el dominio de las siguientes funciones:

7. $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$ Rpta. $Df = \mathbb{R}\,\{-1, 1\}$

8. $x^2y^2 - xy = 4$ Rpta.

9.$x^2y - y - 2x^2 - 2 = 0$ Rpta. $Df =$

10.$y = \sqrt{1 - 4\sqrt{4 - x}}$ Rpta. $Df =$

11. $y = \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{9 - x^2}$ Rpta. $Df =$

12. $y = \sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x^2 - 1}} + ln\left(\dfrac{2 + x}{2 - x}\right)$ Rpta. $Df =$

13. $y = \sqrt{-x} + \dfrac{2}{\sqrt{2 + x}}$ Rpta. $Df =$

14. $y = ln\left(\dfrac{\sqrt{x} - 1}{2 - \sqrt{x + 1}}\right)$ Rpta. $Df =$

15. $y = log\left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}\right)$ Rpta. $Df =$

16. $y = log_4\left[log_{1/2}\left(log_3\sqrt{x}\right)\right]$ Rpta. $Df =$

17. $y = \sqrt{x^2 + 4x - 12} + \dfrac{3x^2}{\sqrt{x + 20 - x^2}}$ Rpta. $Df =$

18. $y = \sqrt{sen\,(2x)\,cos\,(2x)}$ Rpta. $Df = \mathbb{R}\,\{-1, 1\}$

19. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ Rpta. $Df = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

20. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{4 - x^2}}$ Rpta. $Df = [-1, 1]$

Por: Daniel Lima M.

21. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 3x}}$ Rpta. $Df = (-\infty, -3) \cup [-\frac{1}{2}, 0) \cup [1, +\infty)$

22. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - |x|}}$ Rpta. $\emptyset$

CLASES DE FUNCIONES

En los siguientes ejercicios indicar si las funciones son inyectivas, suryectivas o biyectivas

23. $y = x^2 - 1$ Rpta $.Si$

24. $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ Rpta $.Si$

25. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ Rpta $.Si$

26. $y = arctg\,(2x)$ Rpta $.Si$

27. $y = a^x - a^{-x}$ Rpta $.Si$

28. $f(x) = \dfrac{(x+2)(x^2+6x-16)(x-6)}{(x-2)(x^2-4x-12)}$

29. $f(x) = \dfrac{3x^3-3}{x^3+3}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - 1$

FUNCION INVERSA

Hallar las funciones inversas de las siguientes funciones.

33. $y = log(\dfrac{x}{x-1})$

34. $y = ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

35. $y = \dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

36. $y = 3x + \sqrt{x^2+7}$

37. $y = \dfrac{2(1+2x)^2-(1-x)^2}{(1+2x)^2+(1-x)}$

38. $y = \dfrac{(1+x)^3+(x-1)^3}{(1+x)^3+(x-1)^3}$

39. $f(x) = \sqrt{ln\sqrt{lnx}}$

40. $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

OPERACIONES CON FUNCIONES

30. Hallar el mínimo valor de k si $f(x) = \dfrac{9}{2x^2-3x+5} \leq k$ donde $x\epsilon Df$

31. Sea f una función de variable real talque $f(2x+1)=x$. Hallar los valores de t de tal modo que $-6<\dfrac{2f(2x^2-3)+px}{f(2x^2-3)-x}<4$.

32. Hallar $(f+g)(x)$,si $f(x)=\begin{cases}1-x & ;x<2\\ x & 2\leq x<5\\ -3 & x\geq 5\end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases}x-1 & ;x<3\\ 3x-2 & ;3\leq x<6\\ -2 & x\geq 6\end{cases}$

33. Hallar $(f+g)(x)$ si $f(x)=\left|x^2-6x\right|+|x-3|+x$; $x\epsilon\,[0,3]$ y $g(x)=x\,|x|-6$; $x\epsilon\,(-2,4]$

34. Si $f(x^2-20)=\dfrac{7x^2-139}{x^2+17}$ y $f(x-1)=g(2/x)$, hallar $(g\circ f)\,(x)$

35. Si $f(\dfrac{x-1}{x-2})=\dfrac{2x-1}{x-3}$; $g(x+\dfrac{1}{x})=\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2}$ y $(h\circ g\circ f)\,(x-3)=\dfrac{3x-1}{x+8}$ hallar $h(x)$

36. Demostrar que $(f\circ f\circ f\,)\,(x)=x$, si $f(x)=\dfrac{1}{x}$

37. Hallar el valor de la constante a para que $(f\circ g)\,(2a)=(g\circ f)\,(1-a)$, si $f(x)=3x-1$; $g(x)=5-x$

38. Si $F(x)=x$ ademas $\begin{cases}F(g(x))+2h(x)=-x+15\\ F(3(g(x))-h(x)=4x+10\end{cases}$ hallar $h(g(2))$.

39. Si $f(\dfrac{x+3}{x-1})=\dfrac{x}{x+2}$ y $(f\circ g)\,(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$, hallar$g(x)$.

40. Si $(f\circ g)\,(x)=\dfrac{senx}{1+cosx}$, $g(x)=cosx$. Hallar $f(x)$.

41. Si $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=x$, $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$. Hallar $\left(f\circ g^{-1}\right)(x)+\left(g^{-1}\circ f\right)(x)$.

42. Si $(f\circ g\circ h)=\sqrt[3]{x^6+1}$ donde $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $h(x)=x^3$. Hallar $g(x)$.

43. Si $f(x)=3x+2a$, determinar los valores de a de modo que $f(a^2)=f^{-1}(a+2)$

44. Si $f(x+\dfrac{1}{x})=x^3+\dfrac{1}{x^3}$, hallar una expresion para . Rpta. $f(x)=x^3-3x$

45. Si $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=2x-b$; $b\epsilon\mathbb{R}$, calcular el producto de los valores de b, tal que $(f\circ g)(1/2)=(g\circ f)(b+1)$ Rpta. 0

46. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$ y $g(x)=\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$, hallar $\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(4x)$. Rpta. $\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(4x)=\dfrac{8\sqrt[3]{1-4x}+\sqrt[3]{8x-1}}{3\sqrt[3]{8x-1}-4\sqrt[3]{1-4x}}$

47. Dados $f(x)=\sqrt{2x-1}$ y $g(x)=\sqrt{2x^2-7}$, hallar una función $h(x)$, tal que $(f\circ h)\,(x)=g(x)$. Rpta. $h(x)=x^2-3$

Construyase la gráfica de las siguientes funciones especiales

48. $y = \left|x^2 - 4\right| + 1$

49. $y = |x-2| + |x+1| - 3$

50. $y = ||x+1|+1| + 1$

51. $|x| + |y| = 2$

52. $y = x^2 + sgn\left(\dfrac{|x|-2}{x}\right)$

53. $f(x) = 1 + (x^2+1) \cdot sgn(x^2-1)$

54. $x + y = sgn\,(x) + sgn\,(y)$

55. $y = x - \|x\|$

56. $y = 2^{\|x\|-x}$

57. $y = \|x\|\, sen\,(\pi x)$

58. $cos\,(x)\, sgn(senx)$

59. $y = \|x\| - 2\,\|x/2\|$

60. $y = \dfrac{|x|+x}{|x|-\|x\|} \wedge x \epsilon\, [-4,4]$

61. $y = x^2 - 4\,|x| + 4$

62. $x = |y+2| - 1$

63. $y = \begin{cases} \dfrac{|x-4|+2}{|x-4|+1} \cdot sgn(x+3); & |x| \geq 2 \\ \dfrac{x}{|x|-1} \cdot sgn(x); & |x| < 2 \end{cases}$

64. $y = \begin{cases} \left|x^2-9\right|; & ; |x| > 4 \\ sgn(\|x+1\|+2) & ; -4 \leq x < 0 \\ \sqrt{sgn(x-2)\,\|x-2\|} & ; 0 \leq x \leq -1 \end{cases}$

GRÁFICA DE FUNCIONES

Discutir la función o relación (encontrar dominio, rango, intersecciones, simetrías, asintotas) y graficar.

65. $y(9 - x^2) = 3x$

66. $f(x) = \dfrac{2x}{4 + x^2}$

67. $y = \dfrac{3x}{x^2 - 9}$

68. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

69. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 5}{x - 5}}$

70. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{10 - x}}$

70. $xy - 4y^2 - x = 0$

71. $x^2y - x^2 - y + 2 = 0$

72. $xy^2 - 2y^2 = 4x$

73. $xy^2 - y^2 - 4x + 16 = 0$

74. $f(x) = log_3(x - 2)$

75. $f(x) = log(x^2 - 4) - 1$

3. LÍMITES

LIMITES ALGEBRAICOS

Calcular los siguientes limites algebraicos

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2-3x+3}{3x^3-6x^2-9x}$ Rpta. 8/5

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ Rpta. $\frac{a-1}{3a^3}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^{2n}+1-3x^{-2n}}{3x^{2n}-5+2x^{-2n}}$ Rpta. 5

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ Rpta.$(\frac{3}{2})^{10}$

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)^3+3(x-4)-16+x^2}{x^3-64}$ Rpta. $\frac{1}{6}$

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{14}+x^2-2}{x^{12}+x^8+x^2-6}$ Rpta. $\frac{8}{23}$

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{21}+x^{15}+5}{x^{24}+x^{12}+x^4-3}$ Rpta. $-\frac{81}{40}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)^3-(x^2-1)^2}{x^3-4x^2+5x-2}$ Rpta. 9

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ Rpta. $\frac{49}{24}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ Rpta. $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ Rpta. -1

13. Hallar los valor es de m de tal m,anera que $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{x^2-mx+3x-3m}{x-m}=m^2-27$. Rpta. $m=6$, $m=-5$

14. Si $L=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{ax^2+2x+b}$ es diferente de cero calcular el valor de $a+b$. Rpta. -2

15. Si $f(x)=x-2$ y $g(x+1)=x^2-x$, calcular $\lim_{x\to 2}\frac{(f\circ g)(x+1)}{(g\circ f)(x+2)}$. Rpta. 3

16. Si se sabe que $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{1-x^3}=4$ y $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{1-x^2}=-6$. Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$. Rpta. -1

17.. Si se sabe que $f(x)=\frac{b+x}{b-x}$ $x\neq b$, calcular $\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}$ Rpta. $\frac{ab}{(b-a)^2}$

18. Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+bx}\,\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}$ sug. $(1+tx)^r\approx 1+txr$ si $x\to 0$ Rpta. $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}$

LIMITES CON RADICALES

19. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ Rpta. 1/2

17. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ Rpta. 1

18. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ Rpta.$-\frac{1}{3}$

20. $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4}$ Rpta. $-\frac{4}{3}$

21.$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$ Rpta. $\frac{3}{4}$

22. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ Rpta. $\frac{3}{2}$

23. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$ Rpta. 5/8

24. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{15+6x}-\sqrt[3]{25+x}}{x^4+2x-20}$ Rpta. $\frac{5}{918}$

25. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}$ Rpta. 5/6

26. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x}-x+2\sqrt[3]{2x}-\sqrt{8}}{x-4}$ Rpta. $\frac{3\sqrt{2}-8}{12}$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+3x-3}-\sqrt[3]{4x^2+5x-8}}{\sqrt{x^2+9x+6}+\sqrt{x^2+5x+10}}$ Rpta. $-\frac{16}{3}$

Por: Daniel Lima M.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x^2+x}$ Rpta.$\frac{1}{2}$

29. $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{\frac{x}{3}}-x+21}{x-27}$ Rpta. $-\frac{49}{6}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+27}-3}{\sqrt[4]{x^2+16}-2}$ Rpta. $\frac{32}{27}$

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}+4\sqrt[11]{x-1}-3\sqrt[13]{x-1}+4}{\sqrt[3]{x-1}-5\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[7]{x-1}-3}$ Rpta. $-\frac{4}{3}$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}$ Rpta $\frac{3}{2}$

33. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8-2x+\sqrt{x}-\sqrt[3]{2x}}{x-4}$ Rpta $-\frac{23}{12}$

34. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{2x-7}}{x-9-cos(x-10)}$ Rpta $\frac{5}{54}$

35. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4\sqrt[3]{4x}-5\sqrt{8x}-x^2+16}{x^3-4\sqrt{2x}-5\sqrt[3]{4x}+10}$ Rpta $-\frac{23}{25}$

36. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{1-\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}}$ Rpta 3

37. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2\sqrt[5]{\dfrac{x}{2}}}{\sqrt{2x}-2}$ Rpta $\frac{19}{30}$

38. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x-5}-\sqrt{2x+1}+4}{x-4}$ Rpta 0

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}-\sqrt[4]{x^2+6x}}{x^2-4}$ Rpta $\frac{1}{92}$

40. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2\sqrt{x+6}+4x-\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x^2-3}-1}$ Rpta $\frac{5}{3}$

41. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{1-x-x^2}}$ Rpta 3

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{x+1}-1}{x}$ Rpta $\frac{1}{6}$

LIMITES INFINITOS

43. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$ Rpta. $\frac{1}{4}$

44. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$ Rpta. ∞

45. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2}{2x+1} - \dfrac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}$ Rpta. $\frac{1}{2}$

46. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{8x^2+4x+3} - \sqrt{8x^2-4x-3}$ Rpta.

47. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$ Rpta. 72

48. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\dfrac{8x-4}{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)}}$ Rpta. -2

49. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[5]{\dfrac{(5-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)}{243-11}}$ Rpta. $-\frac{1}{3}$

50. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ Rpta. 1

51. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{2x}} - \sqrt{x-\sqrt{2x}}$ Rpta. $\sqrt{2}$

52. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \sqrt{(x-a)(x-b)}$ Rpta. $\frac{a+b}{2}$

53. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{\dfrac{x^5-x^3}{x^2+3}} - x\right)$ Rpta. 0

54. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x+\sqrt{4x+\sqrt{4x}}} - 2\sqrt{x}\right)$ Rpta. $\frac{1}{2}$

55. Si $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^4+kx^3+1}{x^3-x+1} - \sqrt{x^2+3x-10}\right) = \frac{3}{2}$, calcular el valor de k. Rpta.3

56. Hallar las constantes k y b que cumple $\lim\limits_{x\to\infty} kx + b - \dfrac{x^3+1}{x^2+1} = 0$ Rpta. $k=1$; $b=0$

57. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+senx}{x+cosx}$ Rpta. 1

58. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(1-cos\frac{1}{x})$ Rpta. $\frac{1}{2}$

LIMITES TRIGONOMETRICOS

59. $\lim\limits_{x \to 1} (1-x) tg(\dfrac{\pi x}{2})$. Rpta. $\frac{2}{\pi}$

60. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos(mx) - cos(nx)}{x^2}$ Rpta. $\frac{n^2-m^2}{2}$

61. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3sen(\pi x) - sen(3\pi x)}{x^3}$ Rpta. $4\pi^3$

62. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - xsenx} - \sqrt{cos2x}}{tg^2(x/2)}$ Rpta. 6

63. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cosx\, cosx2x - 1}{sen2x - senx\, cosx2x}$ Rpta. 0

64. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 + cos\pi x}{x^2 - 2x + 1}$ Rpta. $\frac{\pi^2}{2}$

65. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{senx - cosx}{1 - tgx}$ Rpta. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

66. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{sen^2(6x) + tg(3x)}{3x - \pi}$ Rpta. 1

67. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{sec^2x - 2tgx}{1 + cos4x}$ Rpta. $\frac{1}{2}$

68. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(\pi + 2x)cos(\dfrac{3\pi}{2} + 3x)}{3x - \pi}$ Rpta. $\frac{2}{3}$

69. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 + senx + cosx}{senx - 1 + cosx}$ Rpta. 1

70. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos(a + x) - cos(a - x)}{x}$ Rpta. $-2sena$

71. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{sen3\pi x + cos\pi x + 1}{x^2 - 1}$ Rpta. $\frac{3\pi}{2}$

72. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{tgx + tg2x}{cosx + cos2x}$ Rpta. $-\frac{8\sqrt{3}}{3}$

73. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - sen\dfrac{x}{2}}{\pi - x}$ Rpta. 0

74. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(1 - senx - cosx)^2}{1 - senx}$ Rpta. 2

LIMITES EXPONENCIALES Y/O LOGARITMICOS

75. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$ Rpta e^3

76. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$ Rpta e^{2a}

77. $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$ Rpta $e^{3/2}$

78. $\lim_{x\to 0}(cosx+asenbx)^{\frac{1}{x}}$ Rpta e^{ab}

79. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1-senx}\right)^{1/senx}$ Rpta e^2

80. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{cosx}{cos2x}\right)^{1/x^2}$

81. $\lim_{x\to 0}(1+tg\sqrt{x})^{1/2x}$ Rpta $e^{1/2}$

82. $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{2-\sqrt{cosx}}\right)^{1/x^2}$ Rpta $e^{1/8}$

83. $\lim_{x\to 0}(1-sen3x)^{1/2x}$ Rpta. $e^{-3/2}$

84. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{sen(ax)-sen(bx)}$ Rpta. 1

85. $\lim_{x\to+\infty}x(ln(x+1)-lnx)$ Rpta. 1

86. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x+x)^{tgx}}{(1+senx)^x}\right)^{ctgx/x}$ Rpta.

87. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+3}{x^3+4}\right)^{x^2+2}$ Rpta. e^2

88. $\lim_{x\to\infty}\left(cosx\sqrt{\frac{5a}{x}}\right)^{bx}$ Rpta. $e^{-15ab/2}$

89. $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{m/x}$ Rpta. e^{2m}

90. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{ln(1+x)}$ Rpta. a

91. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ Rpta. abc

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

En cada uno de los ejercicios verificar si la función es continua

91. $f(x) = \begin{cases} x-1 & , \ x<1 \\ x^2 - x & , \ 1<x \end{cases}$ en $x=1$

92. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^4-1} & , \ x \neq 1 \\ 1 & , \ x = 1 \end{cases}$

93. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & , \ x \leq 0 \\ \dfrac{sen(3x)}{x} & , \ x > 0 \end{cases}$

94. $f(x) = \begin{cases} x & , \ x < -1 \\ 0 & , \ x = -1 \\ -1 & , \ -1 < x < 1 \\ x^2 - 2 & , \ x \geq 1 \end{cases}$

95. $f(x) = \begin{cases} sen(x+1) & , \ x \leq -1 \\ x^2 - 1 & , \ -1 < x < 1 \\ cos(x-1) & , \ x \geq 1 \end{cases}$

96. $f(x) = \begin{cases} 1/x & , \ x < -1 \\ x & , \ -1 < x < 0 \\ senx & , \ 0 \leq x < \pi \\ 1 & , \ x \geq \pi \end{cases}$

Determinar el valor de A y B par que la función sea continua

97. $f(x) = \begin{cases} A & , \ x \leq -1 \\ \dfrac{x^6-1}{x^4-1} & , \ |x| < 1 \\ B + x & , \ x \geq 1 \end{cases}$ .en $x = \pm 1$

98. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , \ x < -1 \\ Ax + B & , \ |x| \leq 1 \\ 2x - 4 & , \ x > 1 \end{cases}$.

99. $f(x) = \begin{cases} -2senx & , \ x \leq -\pi/2 \\ A + Bsenx & , \ -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1 - senx & , \ x \geq \pi/2 \end{cases}$. Rpta. $A = 1$; $B = -1$

100. Suponga que $f(x)$, es una función (definida en todo $\mathbb{R}$) continua en $x = a$. considere la funcion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x \neq a \\ A & , \ x = a \end{cases}$, en que condiciones esta funcion es continua en $x = a$.

4. DERIVADAS

DERIVADAS POR DEFINICIÓN

Calcular la derivada por definición de las siguientes funciones

1. $f(x) = arctgx$
2. $f(x) = e^{senx}$
4. $f(x) = x^x$
5. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$
6. $f(x) = x\sqrt{x+1}$
7. $f(x) = 1 - e^{2x}$
8. $f(x) = secx$
9. $f(x) = Arctang$
10. $f(x) = senx \cdot tgx$
11. $f(x) = Arcsenx$
12. $f(x) = ln(x+1)$

13.$f(x) = e^{cosx}$

14. $f(x) = cos^2x$
15. $f(x) = ln5x$
16. $f(x) = 2senx.cosx$
17. $f(x) = \sqrt[3]{2x+5}$
18. $f(x) = x/\sqrt{a^2 - x^2}$
19. $f(x) = 5^x$
20. $f(x) = 1 + tg^2x$
21. $f(x) = 1 + x^3$
22. $f(x) = ln(x^2 - 1)$
23. $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$
24. $f(x) = 2x/(x^2 - 8)^2$
25. $f(x) = 1/x^3$

DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Calcular la derivada en el punto indicado

26. $f(x) = \sqrt{1+9x}$, $a = 7$ Rpta. $f\,'(a) = \frac{9}{16}$
27. $f(x) = \dfrac{1}{x} + x + x^2$, $a = 3$ Rpta. $f\,'(a) = -\frac{46}{90}$

28. $f(x) = (x^2 + x)^2$, $a = 2$ Rpta. $f'(a) = 60$

29. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}$, $a = 8$ Rpta. $f'(a) = \frac{3}{50}$

30. $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-5}$, $a = 2$ Rpta. $f'(a) = 11$

DERIVABILIDAD

Determinar cuales de las funciones son derivables en los numero dados por x_0

31. $f(x) = |x^2 - 4|$, $x_0 = 2$ y $x_0 = -2$

32. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & , x < 1 \\ (1-x)^2 & , x \geq 1 \end{cases}$ para $x_0 = 1$

33. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & , x < 1 \\ (x)^2 & , x \geq 1 \end{cases}$ para $x_0 = 1$ Rpta . NO

34. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , x < 2 \\ \sqrt{x-2} & , x \geq 2 \end{cases}$ para $x_0 = 2$ Rpta. SI

35. Rpta. SI

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & , x < 0 \\ 2 - 2x^2 & , 0 \leq x < 2 ; x_0 = 2 \\ x^2 - 4x + 2 & , x \geq 2 \end{cases}$$

36. Calcular los valores de a , b y c para que la función.

$$f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{4}{x}\right| & , |x| \geq 2 \\ ax^2 + bx + c & , |x| \leq 2 \end{cases}$$

sea continua en $x = -2$ y diferenciable en $x = 2$. Rpta. $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$, $c = 3$.

37. Calcular los valores de a , y b para que la función f , sea derivable en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 & , x \leq 2 \\ ax + b & , x > 2 \end{cases}$$

Rpta. $a = -12$, $b = 12$

38. Calcular los valores de a , y b para que la función f , sea derivable en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ,x < 1 \\ ax + b & ,x \geq 1 \end{cases}$$

Rpta. $a = 2$, $b = 1$.

39. Calcular los valores de m y n de tal manera que la función f , sea derivable en $x = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + 3 & ,x \leq -1 \\ -4mx + n & ,x > -1 \end{cases}$$

Rpta. $m = 2$, $n = 10$.

40. Si $f(x) = |x - 8|\,(x - 8)$ hallar los puntos donde f es diferenciable.

REGLA DE LA CADENA

Derivar y simplificar las siguientes funciones haciendo uso de tablas y reglas de la cadena.

41. $f(x) = ln\sqrt{\dfrac{1 + senx}{1 - senx}}$ Rpta. $f\,'(x) = \frac{1}{cosx}$

42. $f(x) = \frac{1}{4a}ln\sqrt{\dfrac{(x-a)^2}{x^2 - a^2}}$ Rpta. $f\,'(x) = \frac{1}{4(x^2-a^2)}$

43. $f(x) = ln\left(\dfrac{1 + senx + cosx}{1 + cosx}\right)$ Rpta. $f\,'(x) = \frac{1}{1+senx+cosx}$

44. $f(x) = cosx - \frac{4\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}cosx\right)$ Rpta. $f\,'(x) = \frac{sen^3x}{cos^2x+3}$

45. $f(x) = \frac{1}{13}e^{2x}(2sen(3x) - 3cos(3x))$ Rpta. $f\,'(x) = e^{2x}sen3x$

46. $f(x) = e^x + ln\sqrt{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}$ Rpta. $f\,'(x) = \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}$

47. $f(x) = \frac{1}{2}arctgx + \dfrac{x}{2(1 + x^2)}$ Rpta. $f\,'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

48. $f(x) = ln\sqrt{\dfrac{1 + senx}{cosx}} + \dfrac{senx}{2cos^2x}$ Rpta. $f\,'(x) = sec^3x$

49. $f(x) = \dfrac{senx}{2cos^2x} - \dfrac{1}{2}ln\left(\dfrac{1 + senx}{cosx}\right)$ Rpta. $f\,'(x) = tg^2xsecx$

50. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\dfrac{\sqrt{2}senx.cosx}{2cos^2x-1}\right)$ Rpta. $f\,{'}\,(x)=\frac{2}{2-sen^2 2x}$

51. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}ln\left(\dfrac{\sqrt{2(x^2+1)}+x-1}{x+1}\right)$ Rpta. $f\,{'}\,(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

52. $f(x)=\dfrac{3}{8}ln(x+\sqrt{x^2-1})+\dfrac{1}{8}x\sqrt{x^2-1})(2x^2-5)$ Rpta. $f\,{'}\,(x)=(x^2-1)^{3/2}$

53. $f(x)=-\dfrac{1}{2}arctg(x+1)-\dfrac{x+4}{2(x^2+2x+2)}$ Rpta. $f\,{'}\,(x)=\frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}$

54. $f(x)=arctg(e^x)+\dfrac{e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$ Rpta. $f\,{'}\,(x)=\frac{8e^{3x}}{(e^{3x}+1)^3}$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

55. Hallar $f''(x)$ para la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}arctgx$

56. Hallar $f'''(x)$ para la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$

57. Hallar $f^{iv}(x)$ para la función $f(x)=x^3lnx$

58. Mostrar que $y=\frac{x^2}{2}+x+1$, satisface la ecuación $1+(y')^2-2yy''=0$

59. Si $f(x)=asen(3x)+bcos(3x)$.Hallar los valores de a y b, par que se cumpla la igualdad

$f''(x)+4f'(x)+3f(x)=10cos(3x)$

60. Si $f'(x)=f(\frac{1}{x})$, $x\neq 0$ demostrar que $a)$ f es dos veces derivable $b)$ existen $a,b,c\epsilon\mathbb{R}$ tales que

$ax^2f''(x)+bxf'(x)+cf(x)=0$

61. Comprobar si $(a+bx)e^{y/x}=x$, entonces $x^3y''-(xy'-y)^2=0$

62. Comprobar que la función $y=(x^2-1)^n$ satisface la relación

$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0$

DERIVADA n-ESIMA.

Hallar la derivada n-ésima de la función dada.

63. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

64. $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}$

65. $f(x) = ln\,(x+1)$

66. $f(x) = senx$

67. $f(x) = xe^x$

68. $f(x) = sen^2x$

69. $f(x) = arctgx$

70. $f(x) = e^{ax}$

71. $f(x) = xlnx$

72. $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)}$

73. $f(x) = cos2x$

74. $f(x) = cos2x\,senx$

75. $f(x) = ln\sqrt{\frac{5x-4}{5x+4}}$

76. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^3-7x+6}$

DERIVACION IMPLICITA

Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ de las relaciones o funciones.

70. $lny + \dfrac{x}{y} = k$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x-y}$

71. $xy = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(1-x^2-y^2)}{x(1+x^2+y^2)}$

72. $arctg\left(\dfrac{x}{y}\right) = ln\sqrt{x^2+y^2}$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$

73. $sen(xy) + cos(xy) = tg(x+y)$ Rpta.

74. $x - y = arcsenx - arcseny$ Rpta.

75. $(x+y)^3 + (x-y)^3 = x^4 + y^4$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^3-3x^2-3y^2}{6xy-2y^2}$

76. $y = \sqrt{5+x^2\sqrt{5+x^2\sqrt{5+x^2\sqrt{5+...}}}}$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{2y-x^2}$

77. $ln\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)+e^{\frac{x^2}{y^2}}=1$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{xy}}{}$

78. $\dfrac{x-y}{x+y}+\sqrt{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}=1$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{x+y}$

79. $e^x seny-e^y cosx=5$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx}=senx$

80. $y+\sqrt{y^2-x^2}=ax^2e$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x^2-y^2}$

81. $ln(x^2+xy+y^2)+\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}=ln(3x^2-xy+2y^2)$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx}=x+3y+xy$

82. $1+xy=xy(e^{xy}-e^{-xy})$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx}=0$

83. $e^{x-y}=xy$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx}=1$

84. $tg(x^2+y^2)+e^{x^2}+e^{y^2}=0$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx}=tg(x^2+y^2)$

85. $x^{sen(y)}=(seny)^x+5$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx}=0$

86. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dx}{dy}$ si $m^{y/x}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^m$ Rpta. $\dfrac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

87. Hallar y'' si $x^{1/2}+y^{1/2}=a$

88. Hallar y''' si $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

89. Hallar y'' si $arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)=ln\sqrt{x^2+y^2}$ Rpta. $y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

90. Hallar y'' si $ln(x^3+yx^2-5)=e^{x^2y+x^3-1}$

91. Hallar y'' si
$sen\left(y-x^2\right)-ln\left(y-x^2\right)+2\sqrt{y-x^2}-3=0$

92. Hallar y'' si $(y)^{x^2}=(x)^{x^2}$

93. Hallar y'' si $\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}+e^{-x/y}=4$

94. Hallar y'' si $x^{2/3}+y^{2/3}=5+\dfrac{x^2-y^2}{y^2-x^2}$

DERIVACION PARAMETRICA.

Hallar la derivada de las funciones dadas parametricas

95. $\begin{cases} x = lnt - ln2 + cos(t) - sen(t) \\ y = sent + cost \end{cases}$

96. $\begin{cases} x = lnt - ln2 + cos(t) - sen(t) \\ y = sent + cost \end{cases}$

97. $\begin{cases} x = arcos\left(\left(\sqrt{t^2+1}\right)^{-1}\right) \\ y = arcsen\left(t\left(\sqrt{t^2+1}\right)^{-1}\right) \end{cases}$

98. $\begin{cases} x = e^{2t}cos^2t \\ y = e^{2t}sen^2t \end{cases}$

99. Hallar y'' si $\begin{cases} x = 3cos(3t) \\ y = 2sen(2t) \end{cases}$

100. Hallar y'' si $\begin{cases} x = a\left[sen(t) - tcos(t)\right] \\ y = a\left[cos(t) - tcos(t)\right] \end{cases}$

101. Hallar y'' si $\begin{cases} x = arctg(t) \\ y = ln(1+t^2) \end{cases}$

5. APLICACIONES DE LA DERIVADA

RECTA TANGENTE Y NORMAL

1. Escribir la ecuación de la tangente y de la normal a la hipérbola $xy = 1$, en el punto cuya abscisa es $x = 1/2$. Rpta.- $l_T : 4x + y + 4 = 0$: $l_N : 2x - 8y - 15 = 0$.

2. Escribir la ecuación de la tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$, en el punto cuya abscisa es $x = 3$. Rpta.- $l_T : 8x - y - 22 = 0$

3. Escribir la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $x^3 + y^3 - 2xy = 0$, en el punto $P(1, 1)$. Rpta.- $l_T : x + y - 2 = 0$: $l_N : x - y = 0$.

4. Escribir la ecuación de la tangente a la curva $y = x^3 - 3x$, en el punto $Q(2, 2)$. Rpta.- $l_T : 9x - y - 16 = 0$

5. Escribir la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $y = \sqrt[3]{x - 1}$, en el punto cuya ordenada es $y = 0$. Rpta.- $l_T : x - 1 = 0$: $l_N : y = 0$.

6. Escribir la ecuación de la tangente a la curva $x^3 - axy + 3ay^3 = 3a^3$, en el punto $R(a, a)$. Rpta.- $l_T : 2x + 5y - 7a = 0$.

7. Hallar la ecuación de la recta tangente y de la normal a la curva $y^4 = 4x^4 + 6xy$ en el punto $M(1, 2)$. Rpta.- $l_T : 14x - 13y + 12 = 0$, $l_N : 13x + 14y - 41 = 0$.

8. Hallar la ecuación de la recta tangente y de la normal a la curva $x^3 + y^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ en el punto cuya ordenada es $y = 3$.Rpta.- $l_T : 5x + 6y - 13 = 0$, $l_N : 6x - 5y + 21 = 0$.

9. Hallar la ecuación de la recta tangente y de la normal a la curva $x^2y - 2 = xcos(\pi y)$ en el punto $M(1, 1)$. Rpta.- $l_T : 3x + y - 4 = 0$, $l_N : x - 3y + 2 = 0$.

10. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 21 = 0$, que forma un angulo de 45^0, con el eje X. Rpta.- $L_T : x - y + 3 = 0$, $L_T : x - y + 11 = 0$.

11. Encontrar los puntos en la grafiaca de la ecuacion dad tiene recta tangente horizontal $y = \left(\frac{x}{4}\right)^{2/3} + (x - 4)^{1/3}$. Rpta. $(2, \frac{3\sqrt[3]{2}}{2})$

12. Si una recta tangente a la curva $x^4 - 2x^2 - x - y = 0$ en el punto $(-1, 0)$ es tambien tangente a la misma curva en el punto $Q(a, b)$, hallar las coordenadas de Q. Rpta. $Q(1, 2)$.

13. Si las tangentes a las curva $2x^2 - 8x - y + 1 = 0$, $x^2 + 8x - 2y - 5 = 0$, son paralelas y los puntos de tangencia estan sobre una vertical. Hallar las coordenadas de dichos puntos. Rpta. $(4, 1)$ $(4, \frac{43}{2})$

14. Encontrar la ecuacion de cada una de las rectas normales a la curva $f(x) = x^3 - 4x$ que sean paralelas a la recta $x + 8y - 8 = 0$. Rpta. $y = -\frac{1}{8}(x \pm 2)$

15. Hallar la ecuacion de la normal a la parabola $y = x^2 - 6x + 6$ es perpendicular a la recta en el origen de coordenadas con el vertice de la parabola. Rpta. $L_N : 4x - 4y - 21 = 0$

Por: Daniel Lima M.

16. Hallar todos los puntos de la curva $x + y^3 = 8$ donde la tangente sea paralela a la recta $x + 3y = 2$.Rpta. $(7, 1)$ $(9, -1)$.

17. Hallar los valores de b y c de la curva $y = x^2 + bx + c$, que es tangente a la recta $y = x$ en el punto $(1, 1)$

18. Hallar las ecuaciones de las normales a la grafica de $4x^2 + 9y^2 = 36$ que son paralelas a la recta $3x - 2y = 12$. Rpta. $y \pm \frac{8}{5} = -\frac{2}{3}(x \pm \frac{9}{5})$

19. Hacer un esquema y hallar el angulo agudo en el punto de interseccion de las curvas $x^2+y^2 = 25$, $x^2 - 4y - 4 = 0$. Rpta. $\alpha = arctg(2)$

20. Hallar las ecuaciones la recta tangente y normal a la curva $y = x^{-2}e^{2x}$en el punto de abscisa . Rpta. $4x - e^2y + 5 = 0$.

21. Hallar las constantes a, b y c de modo que las ecuaciones $y = x^2 + ax + b$ e $y = cx - x^2$ sea tangente entre si en el punto $(1, 0)$. Rpta. $a = -3$, $b = 2$, $c = 1$

Demostrar que las parabolas $y^2 = 2px + p^2$e $y^2 = p^2 - 2px$, son ortogonales en sus puntos de interseccion.

MAXIMOS Y MINIMOS

22. Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

a) $f(x) = x^3/3 + 3x^2/2 - 10x$. Rpta.: Crece en $(-\infty, -5)$ y en $(2, \infty)$; decrece en $(-5, 2)$.

b) $f(x) = x^3 + x + 4/x$. Rpta: Crece en $(-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$; decrece en $(-1, 0) \bigcup (0, 1)$..

23. Encontrar los máximos y mínimos locales de las funciones:

a) $f(x) = x^5 - 5x$. Rpta: Máximo local: $(-1, 4)$; mínimo local: $(1, -4)$.

b) $f(x) = x + 1/x$. Rpta: Máximo local: $(-1, -2)$; mínimo local: $(1, 2)$.

24. Estudiar el crecimiento y la concavidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

Rpta: Es siempre creciente y es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$.

b) $f(x) = 2cosx + cos^2x$; $[0, 2\pi]$.

Rpta: Es creciente en $(\pi, 2\pi)$ y cóncava hacia arriba en $(\pi/3, 5\pi/3)$.

25. Dada la curva $y = ax^3 + bx + cx$, encontrar el valor de las constantes a,b y c para que f tenga un punto de inflexión en $(1, 2)$ y además la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto sea -2.Rpta: $a = 4$, $b = -12$, $c = 10$.

26. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = (x+1)^3(x-1)$.

27. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$

28. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{4-x}}$

29. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = x^3 + 3/x$

30. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{4x^2-4}}$

31. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2}$

32. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = \dfrac{10}{x} + \dfrac{x}{10}$

33. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = x^3 - 3x^2$

34. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = 10 + 12x - 3x^2 - 2x^3$

35. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = \dfrac{x}{lnx}$

36. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$

37. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = (x-2)^2(x+4)$

38. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = (x-3)(x-4)^2(x+1)$

39. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$

40. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = (x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3}$

41. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = ln(x^2 + 1)$

42. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

43. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalosde concavidad y graficar $f(x) = ln(x^2 - 1) + \dfrac{1}{x^2 - 1}$

44. Representar la gráfica de analizando maximos minimos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión intervalos de concavidad y graficar $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x^2}$

45. Hallar una funcion polinomica $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, donde no todos los coeficientes son nulos, que satisfaga. f tenga un extremo relativo en $x = -1$. Rpta. $f(x) = ax^4 - 2ax^2$

46. Sea la funcion $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2c$, cuyo punto de inflexion es $(1, -2)$ y cuya recta normal es $x - 2y - 5 = 0$ hallar a, b, c . Rpta.$a = \frac{2}{3}$, $b = -2$, $c = -\frac{1}{3}$

47. Hallar los valores de las constantes a, b, c, d, para que la funcion $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga um extremo relativo en $(0, 3)$ y un punto de inflexion $(1, -1)$

OPTIMIZACIÓN

48. Encontrar dos números cuya suma sea 20 y su producto sea máximo. Rpta.- Los números buscados son: 10 y 10.

49. Hallar dos números diferentes cuyo producto sea 16 y la suma de uno de ellos con el cuadrado del otro sea mínima. Rpta.- Los números buscados son: 8 y 2.

50. Una persona posee 2400 metros de malla y desea cercar un terreno rectangular que está sobre un río. Si no necesita cercar al río, ¿cuáles son las dimensiones del terreno que posee el área más grande para así optimizar su malla?.

51. Se construye un depósito, con una pieza de metal de 3 m. de ancho y 20 m. de longitud. Expresar el volumen en términos de β y hallar el máximo volumen posible.Rpta: $V = 20(1 + cos\beta)sen\beta$; $Vmáx = 15\sqrt{3}$.

52. Se construye un tanque de gas formado por un cilindro y dos semiesferas. El costo por m^2 de las semiesferas es doble a la parte cilíndrica. Si la capacidad es 10π, ¿cuáles son las dimensiones que minimizan el costo? Rpta. $r = \sqrt[3]{15}/2$, $h = 30/\sqrt[3]{225}$

53. Dada una esfera de radio R, encontrar las dimensiones del cono circular recto de volumen m´ınimo que contiene a la esfera. Sugerencia: La generatriz del cono es tangente a la esfera, por lo

tanto perpendicular al radio en el punto de corte. Establecer semejanza de triangulos rectangulos. Rpta. $h = 4R,\ r = R\sqrt{2}$.

54. Un pescador se encuentra en un bote de remos a 2 Km de la costa. Desea llegar a un punto 6 Km más allá del primero y se sabe que puede remar a 3 Km/h y caminar a 5 Km/h. ¿A que punto de la playa debe llegar si el tiempo de la trayectoria debe ser mínimo? Sugerencia: El tiempo de trayectoria es la suma del tiempo que pasa remando y el tiempo que tarda caminando. En ambos casos, t = dist/veloc. (se supone movimiento uniforme). Rpta. Debe remar hasta un punto situado 1,5 Km del punto más próximo en la costa. Una recta variable pasa por (1, 2) y corta al eje X en $A(a, 0)$ y al eje Y en $B(0, b)$.

55. Hallar el área del triángulo AOBde menor área si $a, b > 0$. Rpta. Area(mín) = 4.

56. Hallar las coordenadas del punto sobre $y = \sqrt{x}$ más cercano al (4, 0). Rpta. (7/2, $\sqrt{7/2}$).

57. Con una pieza de 48 cm de ancho se quiere construir un canal para lo cual se doblan los extremos formando un tri´angulo isósceles. ¿Qué ángulo deben formar sus lados para que el canal contenga la mayor cantidad de líquido? Rpta. El ángulo debe ser de 90 grados.

58. Hallar las dimensiones de un triángulo rectángulo de hipotenusa dada que engendre un cono de volumen máximo al girar alrededor de uno de sus catetos. Rpta. Si la hipotenusa mide a, la altura del cono es $h = a/\sqrt{3}$ y el radio $r = a\sqrt{2}/3$.

59. Que número sumado a su reciproco da lugar a una suma mínima?. Rpta. 1

60. Si a y b son catetos de un triángulo rectangulo cuya hipotenusa mide 1, hallar el mayor valor de $2a + b$. Rpta. $a = 2/\sqrt{5}$; $b = 1/\sqrt{5}$

61. Tres lados de un trapecio tiene la misma longitud de 25 cm. De todos los trapecios con esa condición, probar que el area maxima tiene su cuarto lado de longitud de 50 cm. Hallar el area maxima.

62. Una pagina se escribe con un texto de area 54 cm^2 dejando arriba y abajo margenes de ancho igual a 2 cm y lateralmente margenes de ancho de 3 cm, ¿Cual es el tamaño de hoja mas economica?. Rpta. 10x15 ; $A_{min} = 150\, cm^2$

63. Una pared de 3,2 m de altura, esta situada a una distancia de 1,35 m de una casa. Hallar la longitud de la escalera mas corta de manera que apoyandose en el suelo y la pared, llegue apoyarse en la casa. Rpta. 6.25 m

64. Hallar las dimensiones de un cono circular recto de volumen minimo que se puede circunscribir a una esfera de 8 cm de radio. Rpta. Altura=32cm; radio=8$\sqrt{2}$cm

65. Se desea construir una caja rectangular de cartón sin tapa. Si a un cartón de 160 cm^2 se le cortan cuadrados iguales en cada esquina y se doblando los bordes. ¿Cuál debe ser el tamaño de los cuadrados recortados para maximizar el volumen?. Rpta. $2cm$

66. Hallar el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio$a$. Rpta.$h = \frac{4a}{3}$, $r = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$

67. Hallar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en un cono circular recto de altura H y radio R conocidos. Rpta. $h = \frac{H}{3}$; $r = \frac{2R}{3}$.

68. Hallar los puntos de la parábola $y = 8 - x^2$ que están más próximos al punto $(0, 3)$. Rpta.$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7}{2}\right)$

69. Hallar la altura y el radio de la base de un cono circular recto, de volúmen mínimo que puede ser circunscrito a una esfera de radio "a" Rpta.$h = 4a$; $r = a\sqrt{2}$

70. Hallar el area del rectangulo de area maxima inscrita en una semicircunferencia de radio $r = 5cm$.

71. Hallar las dimensiones del mayor rectangulo inscrito en la region delimitada por las funciones $y = x^2 - 4x$, $y = 4x - x^2$. Rpta. $A = \frac{64}{3\sqrt{3}}(u^2)$

72. Inscribase un rectangulo de area maxima entre el segmento de la parabola $y = 9 - \dfrac{1}{4}x^2$, cortada por la recta $y = 3$. Rpta $16\sqrt{2}(u^2)$

73. Inscribir en una esfera de radio R un cilindro de volumen maximo. Rpta. $\frac{1}{\sqrt{3}}V_{esfera}$

74. Hallar la ecuacion de la recta que pasando por el punto $(3, 4)$, determine en el primer cuadrante un triangulo de area minima. Rpta $4x + 3y - 24 = 0$

75. Inscribir un rectangulo de area maxima en una semicircunferencia de radio R (Un lado del rectangulo esta en el diametro de la semicircunferncia). Rpta. $R^2(u^2)$

RAZON DE CAMBIO

76. Dos barcos salen simultaneamente de un puerto, uno viaja hacia el Sur a una velocidad de $30km/h$ y el otro hacia el Este a una velocidad de $40km/h$. Despues de 2 horas ¿cual es la velocidad de separaci´on de los dos barcos? . Rpta. $50\,km/h$

77. A un deposito cilindrico de base circular y 5 m de radio, le esta entrando agua a razon de $25\,litros$ por segundo. Calcular la rapidez a la que sube la superficie del agua. Rpta.0,032 dm/s.

78. Al arrojar una piedra a un estanque de agua tranquila se forman ondas circulares concentricas cuyos radios aumentan de longitud al paso del tiempo. Cuando la onda exterior tiene un radio de 3 metros, este aumenta a una rapidez (velocidad) de 50 cm/s. ¿A qu´e rapidez (velocidad) aumenta el ´area del círculo formado por dicha onda? . Rpta.9,4248 m^2/s

79. Un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido y la longitud de su altura es el doble de la de su diametro. Al recipiente le esta entrando agua a una rapidez constante por lo que

la profundidad del agua va en aumento. Cuando la profundidad es de 1m la superficie sube a razon de 1cm por minuto. ¿A que rapidez le est´a entrando agua al recipiente?. Rpta.1.963 $litros/min$.

80. Un hombre esta parado en un muelle y jala una lancha por medio de una cuerda. Sus manos esta a $3m$ por encima del amarre de la lancha. Cuando la lancha esta $4m$ del muelle el hombre esta jalando la cuerda a una velocidad de $80cm/s$. ¿A qu´e velocidad se aproxima la lancha al muelle? Rpta. $-1m/s$.

81. Una escalera de $5m$ de longitud descansa contra un muro que esta sobre el nivel del suelo. Si el extremo inferior de la escalera se esta resbalando a razon de $1{,}2m/s$ ¿a que velocidad desciende el extremo superior cuando este esta a $3m$ del suelo?. Rpta.$-1,6m/s$.

82. Un farol de $5m$ de altura tiene una luz en la parte superior y un hombre de $1{,}70m$ de estatura se aleja del farol caminando a una velocidad de $1{,}2m/s$. Cuando la distancia de la base del farol a la punta (parte mas alejada) de la sombra del hombre es de $6m$ ¿con que velocidad crece su sombra? ¿con que velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto a la luz?. Rpta. $6m$

83. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de $20m/s$, entonces su altura (posición con respecto al suelo) despu´es de t segundos es $h(t) = 20t - 4{,}9t^2$ metros. ¿Cual es su velocidad despues de 1 segundo? ¿Cuando alcanza la pelota una velocidad de $5m/s$? ¿Cual es la altura maxima que alcanza la pelota? ¿Cual es la velocidad de la pelota cuando esta 12 metros arriba del suelo? .Rpta.$10{,}2\,m/s$

84. La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T $(kelvin)$ y la presion P $(en\,atmosferas)$ con un volumen V (en litros), es $PV = nRT$; donde n es el n´umero de moles del gas y $R = 0{,}0821$ es la constante de los gases. Suponga que en cierto instante $P = 8atm$ y que aumenta a razon de $0{,}10atm/min$, ademas $V = 10\,l$ y disminuye a razon de $0{,}15\,l/min$. Determinar la razon de cambio de T con respecto al tiempo, en ese preciso instante, si $n = 10mol$. Rpta. $-0{,}24kelvin/min$

85. La masa de la parte de una varilla metalica que se encuentra entre uno de sus extremos y un punto que esta a x metros es de $3x^2kg$. Calcular la densidad lineal de masa cuando $x = 2m$, $x = 3m$ y $x = 4m$. ¿En donde es mayor la densidad y donde es menor?. Rpta $4m$ y $2m$.

REGLA DE HOPITAL.

Resolver los siguientes limites por la regla de Hopital

86 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{lnx}$ Rpta. -1

86. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6senx - 6x - 12x^2}{arctg(x+x^2) - x}$ Rpta. 2

87. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$ Rpta. $\frac{49}{24}$

88. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$ Rpta. $(\frac{3}{2})^{10}$

89. $\lim_{x\to 1}(1-x)tg(\dfrac{\pi x}{2})$. Rpta. $\frac{2}{\pi}$

90. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{senx}{x}\right)^{1/x^2}$ Rpta. $e^{-1/6}$

91. $\lim_{x\to 0}\dfrac{3sen(\pi x)-sen(3\pi x)}{x^3}$ Rpta. $4\pi^3$

92. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-xsenx}-\sqrt{cos2x}}{tg^2(x/2)}$ Rpta. 6

93. $\lim_{x\to 0}\dfrac{cosx\,cosx2x-1}{sen2x-senx\,cosx2x}$ Rpta. 0

94. $\lim_{x\to 1}\dfrac{1+cos\pi x}{x^2-2x+1}$ Rpta. $\frac{\pi^2}{2}$

95. $\lim_{h\to 0}\dfrac{ln(x+h)-lnx}{h}$ Rpta. $\frac{1}{x}$

96. $\lim_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ Rpta. $a^a ln(ea)$

97. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{sec^2x-2tgx}{1+cos4x}$ Rpta. $\frac{1}{2}$

98. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-sen\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$ Rpta. 0

99. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-senx-cosx)^2}{1-senx}$ Rpta. 2

100. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-sen^2x-cos^2x)^2}{1-sen^2x}$ Rpta. 1

6. INTEGRAL INDEFINIDA

INTEGRALES POR CAMBIO DE VARIABLE

Calcular la integral por cambio de variable

1. $\int \dfrac{dx}{cos^2(1-4x)}$ Rpta. $-\frac{1}{4}tg(1-4x)+C$

2.$\int (lnx+1)e^{xlnx}dx$ Rpta. x^x+C

4.$\int 4^x e^x dx$ Rpta. $\frac{(4e)^x}{1+ln4}+C$

5.$\int \dfrac{dx}{\sqrt{(1+x^2)ln(x+\sqrt{1+x^2})}}$ Rpta. $2\sqrt{ln(x+\sqrt{1+x^2})}+C$

6.$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$ Rpta. $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{3/2}-(x-1)^{3/2}\right]+C$

7.$\int \dfrac{x-arctg2x}{1+4x^2}dx$ Rpta. $\frac{1}{8}ln\left(1+4x^2\right)-\frac{1}{2}arctg^2\left(2x\right)+C$

8.$\int \dfrac{senx.cosx}{\sqrt{2-sen^4x}}dx$ Rpta. $\frac{1}{8}arcsen\left(\dfrac{sen^2x}{\sqrt{2}}\right)+C$

9. $\int \dfrac{dx}{4+5sen^2x}$ Rpta. $\dfrac{1}{6}arctg\left(\dfrac{2tgx}{3}\right)+C$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$ Rpta. $\dfrac{4}{3}\left(\sqrt{x}+1\right)^{3/2}-4\left(\sqrt{x}+1\right)^{3/2}+C$

11. $\int \dfrac{(x-2)dx}{x\sqrt{x-1}\sqrt{x^2-x+1}}$ Rpta. $2arcsen\left(\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\right)+C$

12. $\int \dfrac{cos6x+6cos4x+15cos2x+10}{cos5x+5cos3x+10cosx}dx$ Rpta. $2senx+C$

13. $\int \sqrt{\dfrac{secx-tgx}{secx+tgx}}dx$ Rpta. $ln\left|secx+tgx\right|-ln(secx)+C$

14. $\int sec^3xdx$ Rpta.

15. $\int \dfrac{e^x dx}{a+be^x}$ Rpta. $\frac{1}{b} ln\left|a+be^x\right|+C$

16. $\int \dfrac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx$ Rpta. $\frac{1}{4} ln\left|x^4-4x+1\right|+C$

17. $\int \dfrac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+2x^2+x}}dx$ Rpta. $arctg^2\sqrt{x}+C$

18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(1+x^2)ln(x+\sqrt{1+x^2})}}$ Rpta. $2\sqrt{ln(x+\sqrt{1+x^2})}+C$

19. $\int \dfrac{sen\sqrt{x}cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ Rpta. $-cos^2\sqrt{x}+C$

20. $\int \dfrac{cos^3x}{1-senx}dx$ Rpta. $senx-\frac{cos^2x}{2}+C$

INTEGRACION POR PARTES

Calcular las siguientes integrales por método de integración por partes.

21. $\int (7+x-3x^2)e^{-x}dx$ Rpta.

22. $\int xsec^2xdx$ Rpta. $xtgx+ln\left|cosx\right|+C$

23. $\int arcsen(2x)dx$ Rpta. $xarcsen2x+\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{2}+C$

24. $\int \dfrac{lnx}{x^3}dx$ Rpta. $-\dfrac{1+2lnx}{4x^2}+C$

25. $\int ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$ Rpta. $xln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$

26. $\int cos(lnx)dx$ Rpta. $\dfrac{x}{2}(sen(lnx))+cos(lnx)+C$

27. $\int x\,arctg^2xdx$ Rpta. $\dfrac{1}{2}[(x^2+1)arctg^2x-2xarctgx+ln(x^2+1)+C$

28. $\int \dfrac{ln(lnx)}{x^3}dx$ Rpta. $lnx[ln(lnx)-1]+C$

29. $\int \dfrac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}dx$ Rpta. $\dfrac{2xe^x}{x+1}-e^x+C$

30. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$ Rpta. $-\frac{xe^x}{x+1}+e^x+C$

31. $\int \frac{xarcsenx}{(1-x^2)^{3/2}}dx$ Rpta. $-\frac{arcsenx}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2}ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$

32. $\int \frac{arctgx}{x^2}dx$ Rpta. $-\frac{arctgx}{x}+lnx-ln\sqrt{1+x^2}C$

33. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$ Rpta

34. $\int e^{2x}cos(e^x)dx$ Rpta

35. $\int arctg(\sqrt{x+1})dx$ Rpta. $(x+2)arctg\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}+C$

36. $\int ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})dx$ Rpta.

37. $\int \frac{e^{senx}cos^4x-1}{cos^3x}dx$ Rpta.

INTEGRACION DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

35. $\int sen^4xdx$ Rpta. $\frac{3x}{8}-\frac{sen2x}{4}+\frac{sen4x}{32}+C$

36.$\int sen^2(3x)dx$ Rpta. $\frac{x}{2}-\frac{sen6x}{12}+C$

37.$\int cos^4(2x)dx$ Rpta. $\frac{3x^2}{8}+\frac{xsen(4x)}{8}+\frac{xsen(8x)}{64}+C$

38.$\int cos^5(3x)dx$ Rpta. $\frac{sen(3x)}{3}+\frac{2sen^3(3x)}{9}+\frac{sen^5(3x)}{15}+C$

39.$\int tg^2(4x)dx$ Rpta. $\frac{tg4x}{4}-x+C$

40.$\int tg^6(x)dx$ Rpta. $\frac{1}{5}tg^5x-\frac{1}{3}tg^3x-tgx+x+C$

41. $\int tg^3xdx$ Rpta. $\frac{1}{2}tg^2x+ln(cosx)+C$

42. $\int ctg^5(2x)dx$ Rpta. $-\frac{1}{8}csc^4(2x)+\frac{1}{2}ctg^2(2x)+\frac{1}{2}ln(sen2x)+C$

43. $\int sen^4x\cdot cos^3xdx$ Rpta. $\frac{1}{5}sen^5x-\frac{1}{7}sen^7x+C$

44. $\int sen^2x\cdot cos^2xdxdx$ Rpta. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}sen(4x)+C$

45. $\int sen^5x \cdot cos^2x dx$ Rpta. $-\dfrac{cos^3x}{3}+\dfrac{2cos^5x}{5}-\dfrac{cos^7x}{7}+C$

46. $\int sen^4x \cdot cos^2x dx$ Rpta. $\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}+\frac{senx}{8}-\frac{sen^3 2x}{6}\right)+C$

47. $\int sec^4(x)tg^7(x)dx$ Rpta. $\frac{1}{10}tg^{10}x+\frac{1}{8}tg^8x+C$

48. $\int ctg^3(x)csc^4(x)dx$ Rpta. $\dfrac{ctg^4x}{4}-\dfrac{ctg^6x}{6}+C$

49. $\int ctg^3(x)csc^3(x)dx$ Rpta. $-\dfrac{csc^5x}{5}+\dfrac{csc^3x}{3}+C$

50. $\int \dfrac{sen^3x}{cos^4x}dx$ Rpta. $\dfrac{sec^3x}{3}-secx+C$

51. $\int \dfrac{sen^5 3x}{cos3x}dx$ Rpta. $\dfrac{ln\left|sec3x\right|}{3}+\dfrac{cos^2 3x}{3}-\dfrac{cos^4 3x}{12}+C$

52. $\int \dfrac{sen^4x}{cos^2x}dx$ Rpta. $tgx+\frac{sen2x}{4}-\frac{3x}{2}+C$

53. $\int \dfrac{sec^4x}{tg^2x}dx$ Rpta. $-ctgx+tgx+C$

54. $\int sen8xsen3xdx$ Rpta. $\frac{sen5x}{10}+\frac{sen11x}{22}+C$

55. $\int cos4xcos5xdx$ Rpta. $\frac{senx}{2}+\frac{sen9x}{18}+C$

56. $\int sen5xcosxdx$ Rpta. $-\frac{cos6x}{12}+\frac{cos4x}{8}+C$

57. $\int \left(\sqrt{sen2x}-cos2x\right)^2 dx$ Rpta. $\frac{x}{2}+\frac{sen4x}{8}-\frac{cos2x}{2}-\frac{2}{3}(sen2x)^{3/2}+C$

58. $\int sen(4x+7)cos(5x+8)dx$ Rpta. $\frac{1}{18}\left(9cos(x+1)-cos(9x+15)\right)+C$

59. $\int cosh(x)\cdot cosh(3x)dx$ Rpta. $\frac{1}{8}senh(4x)+\frac{1}{4}senh(2x)+C$

60. $\int senh^2x \cdot cosh5xdx$ Rpta. $\frac{senh7x}{28}+\frac{senh3x}{12}-\frac{senh5x}{10}+C$

61. $\int senh4x \cdot senhxdx$ Rpta. $\frac{cosh5x}{10}+\frac{cosh3x}{6}+C$

62. $\int cosx \cdot sen7x \cdot cos11xdx$ Rpta.

63. $\int senx \cdot cos7x \cdot sen11xdx$ Rpta.

INTEGRALES POR SUSTITUCION TRIGONOMETRICA.

64. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$ Rpta. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}})+C$

65. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2x^2+7}}$ Rpta. $\frac{\sqrt{2x^2+7}}{6}(x^2+7)+C$

66. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}$ Rpta. $\frac{\sqrt{x^2+3}}{9x}-\frac{(x^2+3)^{3/2}}{27x^3}+C$

67. $\int \frac{(4x+5)dx}{(x^2+2x-3)^{3/2}}$ Rpta. $\frac{9x-13}{\sqrt{x^2-2x+2}}+C$

68. $\int \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x^3}dx$ Rpta. $\frac{(x^2-4x)^{3/2}}{6x^3}+C$

69. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{(4-x^2)^{7/2}}}$ Rpta. $\frac{x^5}{10(4-x^2)^{5/2}}+C$

70. $\int \frac{(x^2-25)^{3/2}dx}{x^6}dx$ Rpta. $\frac{(x^2-4x)^{5/2}}{125x^5}+C$

71. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$ Rpta. $\frac{1}{2}arcsen(x+1)+\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2(x+1)^2}+C$

72. $\int \frac{senx}{\sqrt{cos^2x+4cosx+1}}dx$ Rpta. $-ln\left|cosx+2+\sqrt{cos^2x+4cosx+1}\right|+C$

73. $\int \frac{2x^2-4x+4}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ Rpta. $arcsen(\frac{x-1}{2})-(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}+C$

74. $\int \frac{1}{(x^2-2x+5)^{3/2}}dx$ Rpta. $-\frac{arcsenx}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2}ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$

75. $\int \frac{\sqrt{y^2-4}}{y^4}dx$ Rpta. $\frac{1}{12}\frac{(y^2-4)^{3/2}}{y^3}C$

76. $\int \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}dx$ Rpta. $arctg(\frac{\sqrt{x^2-2}}{x})+C$

77. $\int \frac{2x^2+1}{(x^2+4)^2}dx$ Rpta.

78. $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ Rpta. $arctg(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})+C$

INTEGRALES POR FRACCIONES PARCIALES

Por fracciones parciales calcular las siguientes integrales

79. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$ Rpta. $ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$

80. $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$ Rpta. $\frac{1}{\sqrt{3}}ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$

81. $\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)}dx$ Rpta. $\frac{1}{2a^2}ln\left|\frac{x^2}{a^2-x^2}\right|+C$

82. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$ Rpta. $5x+ln\left|\frac{\sqrt{x}(x-4)^{161/6}}{(x-1)^{7/3}}\right|+C$

83. $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-x+1}dx$ Rpta. $-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{5}{4}ln(x-1)-\frac{1}{4}ln(x+1)+C$

84. $\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+3x}dx$ Rpta. $\frac{lnx}{3}-\frac{ln(x^2-2x+3)}{6}+\frac{2}{3}arctg(\frac{x-1}{2})+C$

85. $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2}dx$ Rpta. $\frac{1}{x}+ln(\frac{x^2}{x+1})+C$

86. $\int \frac{x^2+x-2}{x^4+5x^2+4}dx$ Rpta. $\frac{1}{6}ln(\frac{x^2+1}{x^4+4})-arctgx+arctg\frac{x}{2}+C$

87. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$ Rpta. $\frac{3}{2}ln(x^2-2x+5)-ln\left|x-1\right|+\frac{1}{2}arctg(\frac{x-1}{2})+C$

88. $\int \frac{x^2}{1-x^6}dx$ Rpta. $\frac{1}{6}ln\left|\frac{x^3+1}{x^3-1}\right|+C$

89. $\int \frac{x^2}{x^6-10x^3+9}dx$ Rpta. $\frac{1}{24}ln\left|\frac{x^3-9}{x^3-1}\right|+C$

90. $\int \frac{x^3+4x+1}{x^4+x^2+1}dx$ Rpta.

Por: Daniel Lima M.

91. $\int \frac{2x}{x^4+x^2+1}dx$ Rpta. $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}})+C$

92. $\int \frac{1}{x(x^7+1)^2}dx$ Rpta. $ln(x)-\frac{1}{7}ln(x^7+1)+\frac{1}{7(x^7+1)}+C$

93. $\int \frac{dx}{x(x^{999}+1)^2}$ Rpta. $ln(x)-\frac{1}{999}ln\left|x^{999}+1\right|+\frac{1}{999(x^{999}+1)}+C$

94. $\int \frac{(4x^2-8x)}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$ Rpta. $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)} + ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + arctgx + C$

95. $\int \frac{1}{\left(x^4-1\right)^2}dx$ Rpta. $\frac{8}{3}arctg(x) - \frac{x}{4(x^4-1)} - \frac{3}{16}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

96. $\int \frac{4x^2+6}{(x^3+3x)}dx$ Rpta. $ln\left(x^2(x^2+3)\right) + C$

97.$\int \frac{x^5dx}{(x^2+4)^2}dx$ Rpta. $\frac{x^2}{2} - \frac{8}{x^2+4} - 4ln(x^2+4) + C$

98.$\int \frac{x^4-4x^2-14x}{x^2-2x-8}dx$ Rpta. $\frac{x^3}{2} + x^2 + 8x + \frac{68}{3}ln(x-4) - \frac{14}{3}ln(x+2) + C$

99.$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^3}dx$ Rpta.$\frac{2(x+1)}{(x^2+2x+5)^2} + \frac{3(x+1)}{4(x^2+2x+5)} + \frac{3}{8}arctg(\frac{x+1}{2}) + C$

100. $\int \frac{dx}{x(x^{999}+1)^2}$ Rpta. $ln(x) - \frac{1}{999}ln\left|x^{999}+1\right| + \frac{1}{999(x^{999}+1)} + C$

7. INTEGRAL DEFINIDA.

Calcular las siguientes integrales

1. $\int\limits_{-1}^{0} \dfrac{dx}{4x^2+8x+8}$ Rpta. $\frac{\pi}{16}$

2. $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{dx}{x^2-4x-5}$ Rpta. $-\frac{1}{6}ln2$

3. $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$ Rpta. $\frac{\pi}{4}$

4. $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} tg^7 x dx$ Rpta. 0

5. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}\sqrt{2-x} dx$ Rpta. $\frac{\pi}{4}$

6. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}} dx$ Rpta. $\sqrt{2}-ln(1+\sqrt{2})$

7. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{xe^x}{(1+x)^2} dx$ Rpta. $\frac{e-2}{2}$

8. $\int\limits_{0}^{1} ln\sqrt{2-x} dx$ Rpta. $ln(2)-\frac{1}{2}$

9. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx$ Rpta. $\frac{\pi}{3}$

10. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/8} ctgx \cdot ln(senx) dx$ Rpta. $\frac{1}{2}\left\{ln^2(\sqrt{\frac{3}{2}})-ln^2(\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$

11. $\int\limits_{a-1}^{a} \dfrac{e^{-x}}{x-a-1} dx$ Rpta. $-ke^{-a}$ sug.$u=x-a-1$

12. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{xe^{x^2}}{x^2+1} dx$ Rpta. $\frac{1}{2}k$

13. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{e^x}{(x+1)^2} dx$ Rpta. $k+1-\frac{1}{2}e$

Por: Daniel Lima M.

14. $\int\limits_{0}^{1} e^x ln(1+x)dx$ Rpta. $e \cdot ln2 - k$

15. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} xsenxdx$ Rpta. 2

16. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{81}cos(x^9)dx$ Rpta. 0

17. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^{14}tg(x^7)+6)dx$ Rpta. 3π

CALCULO DE AREAS.

Hallar el área limitada por las siguinetes curvas

18. $y = x$, $y = 2x$, $x = 0$, $x = 1$ Rpta. 1/2

19. $y = x^2 - 4$, el eje X, $x = 0$, $x = 4$ Rpta. 16

20. $y = x^3$, $y = x$ Rpta. 1/2

21. $y = x^2 + 1$, $y = x + 1$ Rpta. 1/6

22. $y = \sqrt{4-4x}$, $y = \sqrt{4-x}$ y el eje X Rpta.

23. $y = senx$, $y = cosx$, el eje Y en el primer cuadrante Rpta.

24. $x = y^2$, $x = -2y^2 + 3$ Rpta. 4

25. $y^2 = 2x + 1$, $y = x + 1$ Rpta. 16/3

26. $y = sen2x$, $y = senx$, $x = 0$, $x = \pi$ Rpta. 5/2

27. $y = ln^2x$, $x = 0$, $x = 1$ y el eje X Rpta. 2

28. $y = \dfrac{ln}{4x}$, $y = xlnx$ Rpta. $\frac{1}{16}(32ln2 - 2ln^2 2)$

29. $y = lnx$, $y = ln^2x$ Rpta. $3 - e$

30. $y = x^3 - 4x^2 + 3x$, $y = -x^3 + 3x^2 - 2x$ Rpta. $3253/96$

31. $y = 3x - x^2$, $y = 3x^2 - x^3$ Rpta. $37/12$

32. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ Rpta. 5

33. $y = x^2 - 2x + 1$, $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1$ Rpta. $\frac{10}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}ln(3 + \sqrt{8})$

34. $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 4$ en el primer cuadrante Rpta. $20ln(4/5)$

35. $y = \dfrac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$, en el primer cuadrante Rpta. 18

LONGITUD DE ARCO

Hallar la longitud de arco:

36. De la curva $y^2 = 4x - x^2$, comprendida entre los dos puntos en que corta al eje X

37. De la curva $y = e^x$ del punto (0,1) al (1,e)

38. De la parábola $y = 2\sqrt{x}$ $x\epsilon\,[0, 1]$

39. De la curva $9y^2 = 4x^3$, del origen al punto $\left(3, 2\sqrt{3}\right)$

40. R es la región del plano limitada superiormente por $x^2 + y^2 = 2$ e inferiormente por $y = -x^2$. Hallar la longitud del contorno de R.

41. Si $f(x) = \int_0^x \sqrt{cost}dt$, encontrar la longitud del arco de la gráfica de f, con $x\epsilon\,[0, \pi]$

42. Determinar la longitud del arco de la curva descrita por $y = ln(secx)$, con $x\epsilon\,[0, \pi/6]$

43. Determinar la longitud de la curva $y^3 = x^2$, desde (-1,1) hasta $\left(2\sqrt{2}, 2\right)$

44. Encontrar la longitud de la curva $y = \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{x^4}{16}$ desde $x = -2$ hasta$x = 1$.

45. Determinar la longitud del arco de la curva descrita por $y = 1 - ln(cosx)$, con $x\epsilon\,[0, \pi/4]$.

46. Calcula la longitud de la circunferencia de radio r .

47. Hallar la longitud del arco de la curva $9y^2 = 4x^3$comprendido entre los puntos de la curva de abscisa x = 0 y x = 3

48. Hallar la longitud de arco de curva $y = ln(cosx)$ comprendido entre los valores x = 0 y x = π/2

49. Hallar la longitud del arco de curva de la función $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ comprendido entre los valores $x = -1$y $x = 1$.

50. Hallar la longitud del arco de curva de la función $24xy - x^4 - 48 = 0$

VOLUMEN DE UN SOLIDO

Hallar el volumen del solido:

51. Generado al hacer girar alrededor el eje X , la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje X y la recta $x = 2$.

52. Generado al girar el área limitada por $2y = 6 - x$, $y = 0$,$x = 0$,$x = 4$, alrededor del eje X.

53. Que genera la superficie limitada por $y^2 = x^3$,$y = 0$, $x = 0$,$x = 4$ al girar alrededor del eje X.

54. Generado al hacer girar la curva $y = x^2 + 1$ alrededor del eje Y, desde $y = 1$ a $y = 5$.

55. Generado por la rotación de la región limitada por $y^2 = 4(2 - x)$, $x = 0$ alrededor de la recta $y = 4$.

56. Generado por la rotación alrededor del eje X de la región limitada por las curvas $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$,$y = 0$.

57. Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por la rotación alrededor OX del área limitada por $y = 6 - x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

58. Calcular el volumen que engendra un triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0) al girar 360° alrededor del eje OX.

59. Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por el trapecio que limita el eje de abscisas, la recta $y = x + 2$ y las coordenadas correspondientes a $x = 4$ y $x = 10$, al girar alrededor de OX.

60. Calcular el volumen engendrado por una semionda de la sinusoide $y = senx$, al girar alrededor del eje OX.

61. Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

62. Hallar el volumen del cuerpo revolución engendrado al girar alrededor del eje OX, la región determinada por la función $y = \frac{1}{2} + cosx$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

63. Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las gráficas de $y = 6x - x^2$, $y = x$.

64. Hallar el volumen engendrado por el círculo $x^2 + y^2 - 4x = -3$ al girar alrededor del eje OX.

65. Hallar el volumen de la figura engendrada al girar la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, alrededor del eje OX.

CENTRO DE MASA

66. Calcular el volumen del elipsoide. Rpta. $\dfrac{4}{3}\pi abc(u^3)$

67. Encuentre el centro de masa del sistema formado por las masas puntuales $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 1$ kg, $m_3 = 7$ kg y $m_4 = 5$ kg que se encuentran localizadas en un plano cartesiano, en los puntos P.(1,3);P2.(2,7); P3.(1,1) y P4.(2,3), respectivamente.

68. Determine las coordenadas del centro de la región delimitada por las curvas $y = x$, y $y = x^2 - 6$ y $x = 0$.

69. Encontrar el centro de masa, de una lámina de densidad uniforme ρ, delimitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y_1 = \sqrt{x}$.

70. Encontrar el centro de masa , de una lámina de densidad uniforme ρ delimitada por las gráficas $f(x) = x$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{3}$

71. Encontrar el centro de masa de una placa semicircular de radio 5 (placa con densidad uniforme).

72. Para una la´mina con densidad constante ρ, acotada por la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5x + 1$, encontrar el centro de masa.

73. Considerar una la´mina con densidad constante acotada por la gráfica de las funciones $y = e^x$ y $g(x) = 1$, en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar el centro de masa de la la´mina.

74. Encontrar el centro de masa de una la´mina (con densidad uniforme) delimitada por la gráfica de las funciones$f(x) = senx$ y $g(x) = cosx$ en el intervalo $[0, \pi/4]$.

MISCELANEA

75.Se construye un depósito de combustible cuya forma se obtiene al hacer girar alrededor del eje de las abscisas, el segmento de la parábola $y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$ para $x \epsilon [-4, 4]$. Rpta. 53.62 m^3.

76. Calcular el volumen que se genera al girar, alrededor de la recta $x = 2$, la región limitada por la curva $y = \dfrac{x^3}{4} + 1$ y las rectas $x = 2$, $y = 1$. Graficar la región dada y el volumen requerido. Rpta. $4\pi/5u^3$

77. Determinar el volumen que se genera al hacer girar la región limitada por las parábolas $y-4 = -x^2$ y $y = (x-2)^2$ alrededor del Eje " x " . Rpta. $\frac{32}{3}\pi(u^3)$

78. Determinar el volumen que se genera al hacer girar la región limitada por las parábolas $y-4 = -x^2$ y $y = (x-2)^2$ alrededor del Eje " y ". Rpta. $\frac{16}{3}\pi(u^3)$.

79. Calcular la derivada de las siguiente función: $F(x) = \int_{x}^{x^2} e^{-t}(sent + cost)dt$.

80. Calcular la derivada de las siguiente función: $F(x) = \int_{0}^{x^2} (sent \cdot cost)dt$.

81. Hallar el área de la región contenida entre las curvas: $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^3-x}$ para $x\epsilon\,[2,3]$.

82. Hallar el área de la región contenida entre las curvas: $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^3-x}$ para $x\epsilon\,[3,+\infty]$.

83. Dada la función $y = 2x\sqrt{1-x^2}$, calcular el volumen engendrado al girar la curva alrededor del eje de ordenadas. Rpta. $\pi^2/2(u^3)$

84. Calcular la longitud de curva de $r^2 = 5cos(2\theta)$.

85. Calcular el área encerrada por uno de los bucles de la curva de $r^2 = 5cos(2\theta)$.

86. Hallar la ecuación de la recta que pase por el origen y que bisecta el área limitada por la parábola $y = 6x - x^2$ y el eje X.

87. Demostrar que el área de cualquier segmento de una parábola limitada por una cuerda perpendicular al eje de la parábola es igual a dos tercios del área del rectángulo formado por la cuerda, la tangente al vértice y las dos rectas paralelas al eje que pasan por los extremos de la cuerda.

88. Hallar el área de la figura limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = 2x - x^2$

89. Hallar el área de la figura limitada por las parábolas $3 - x = y^2$, $2x + y^2 = 0$

90. Hallar el área de la figura limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$y la recta $x = 1$,

91.Hallar el área de la figura limitada por las curvas $y = e^x$, $y = lnx$, la recta $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$.

92. Hallar el área de la figura limitada por las curvas La curva $y(x^2+1) = 1$ y la parábola $2y = x^2$

93. Hallar el área de la figura limitada por la hipérbola $xy = m^2$, las rectas $x = a$, $x = 3a$ y el eje X.

94. Hallar la longitud de la curva $y^2 = (x+1)^2 - x^4$ Rpta. 8.99 (u)

95. Hallar la superficie del sólido generado por la astroide de ecuación $\begin{cases} x = cos^3 t \\ y = sen^3 t \end{cases}$ al girar alrededor del eje Y.

97. Calcular el área encerrada por $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x^2 - 2}$, $x = 2$ y el eje Y.

98. Sea la función $f(x) = senx–xcosx$. Calcular aproximadamente el valor del área encerrada por $f(x)$y las rectas $x = -\pi$; $x = \pi$ y el eje X.

99. Sea la función $f(x) = senx–xcosx$. Calcular la longitud de curva entre los puntos $(-\pi, \pi)$ y (π, π).

100. Sea la función $f(x) = senx–xcosx$. Calcular la superficie de revolucion generada al girar alrededor del eje de las abscisas.