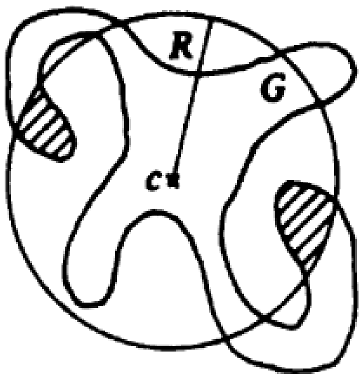
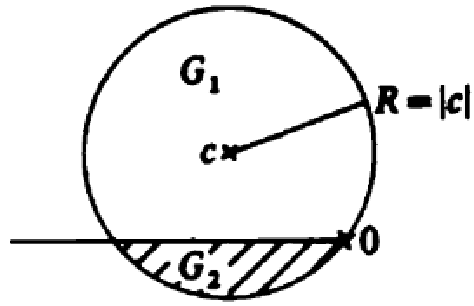
Guía de trabajos prácticos de Cálculo Complejo





$$\int_0^\infty \cos t^2 dt = \int_0^\infty \sin t^2 dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$f^+(z) = \frac{-1}{2i(i+c)} \frac{1}{1+\frac{z-c}{i+c}} = \sum_0^\infty \frac{1}{2i} \frac{(-1)^{\nu+1}}{(i+c)^{\nu+1}} (z-c)^\nu \,, \quad |z-c| < s,$$

$$f^-(z) = \frac{1}{2i(z-c)} \frac{1}{1-\frac{i-c}{z-c}} = \sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2i} \frac{1}{(i-c)^{\nu+1}} (z-c)^\nu \,, \quad |z-c| > r.$$

Lic. Clemente Caceres

CAPITULO 1 MAT-218

NÚMEROS COMPLEJOS

1. Si z_1 y z_2 son números complejos diferentes del complejo nulo, demostrar que $\left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right)=\frac{1}{z_1 z_2}$.
2. Si z_1 y z_2 son números complejos diferentes del complejo nulo, demostrar que $\left(-\frac{1}{z_1}\right)\left(-\frac{1}{z_2}\right)=\frac{1}{z_1 z_2}$.
3. Calcular la suma $S = 1 + i + i^3 + i^5 + i^7 + \ldots + i^{91}$. Sol: $S = 1$
4. Encontrar el valor de $E = i^{1!+2!+3!+4!+5!+\ldots+79!+80!}$ Sol: $E = i$
5. Determinar los valores reales x, y tales que $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$.
6. Hallar los valores de a y b tales que $(-1 + i)\, a + (1 + 2i)\, b = 1$.
7. Hallar los valores de a y b si $(a + b) + (a - b)\, i = (2 + 5i)^2 + i\,(2 - 3i)^2$. Sol: $a = 2$, $b = -20$
8. Si $2z - 1 = i$ encontrar el valor de $P = (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4)$. Sol: $P = \frac{15}{16}(1+i)$
9. Si z es un número complejo donde $\mathrm{Re}(z) = 7$. Hallar $E = |1 + z|^2 - |1 - z|^2$. Sol. $E = 28$.
10. de la igualdad $a+ib=\left[(2-3i)^{(1+i)}\right]^{1-i}$. Determinar $a-b$. Sol: 7.
11. Demostrar algebraicamente que $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; donde $z_2 \neq \mathbf{0}$.
12. Hallar todos los números complejos $z = x + iy$, para cada número real $a \geq 0$, que satisfaga la igualdad: $|z|^2 - 2iz + 2a(1 + i) = 0$.

$$\text{Sol: } \begin{cases} z_{1,2} = a + \left(-1 \pm \sqrt{1-a^2-2a}\right) i & \text{para } 0 \leq a < -1 + \sqrt{2} \\ z = -1 + \sqrt{2} - i & \text{para } a = -1 + \sqrt{2} \\ \text{Para } a > -1 + \sqrt{2}, \text{ no existe solución} \end{cases}$$

13. Para cada número real $a \geq 1$ hallar todos los números complejos $z = x + iy$ que satisfacen la igualdad $z + a\,|z + 1| + i = 0$.

$$\text{Sol: } \begin{cases} z = -1 - i\,, & \text{si } a = 1 \\ z_{1,2} = \dfrac{-a^2 \pm a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1} - i\,, & \text{si } 1 < a < \sqrt{2} \\ z = -2 - i, & \text{si } a = \sqrt{2} \\ \text{Para } a > \sqrt{2}\,, \text{ no tiene solución} \end{cases}$$

14. Si z y w representan números complejos resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} z^{12} w^{19} = 1 \\ z^5 w^7 = 1 \\ z^2 + w^2 = -2 \end{cases}$ Sol: $w = z = \pm i$
15. Si z y w representan números complejos resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 \\ z^2\, \overline{w}_2 = 1 \end{cases}$ Sol: $z = \pm$, $w = \mp 1$
16. Demostrar que si z y w son números complejos diferentes, entonces $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z-w}\right)-\mathrm{Re}\left(\frac{w}{z-w}\right)=1$.

17. Demostrar que si z y w son números complejos diferentes, entonces $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right)+\operatorname{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right)=1$.
18. Demostrar que $|z - \frac{3}{4}i| = ¼$ si $z = (1 - a)/(1 + 2ai)$, donde a es un número real.
19. Si $z = x + iy$, graficar $|z| = \operatorname{Re}(z) + 1$. Sol: $y^2 = 2x + 1$
20. Si $z = x + iy$, graficar $|z + 2i| + |z - 2i| = 6$.
21. Demostrar la identidad $|1 - zw|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$, z y w son números complejos.
22. Demostrar que $\left|\frac{z-w}{1-zw}\right|<1$, si $|z| < 1$ y $|w| < 1$; $z, w \in \mathbb{C}$
23. Hallar el módulo de $z = \dfrac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1-\cos\alpha+i\sin\alpha}$, donde $0 \le \alpha \le \pi$. Sol: $|\operatorname{ctg}(\alpha/2)|$
24. Sabiendo que $z = \sqrt{3}(\cos 330° + i\sin 330°)$, Calcular $A = (z-\bar{z})^{z+\bar{z}}$. Sol: $3\sqrt{3}\,i$
25. Si tenemos que $z = \dfrac{\sqrt{\sin\theta + i\sqrt{\cos\theta}} - i\sqrt{\sin\theta - i\sqrt{\cos\theta}}}{\sqrt{\sin\theta + i\sqrt{\cos\theta}} + i\sqrt{\sin\theta - i\sqrt{\cos\theta}}}$, calcular $\operatorname{Re}(z)$. Sol: 0
26. Empleando números complejos probar que

$$\sin^4\alpha\cos^3\alpha = \frac{1}{64}(\cos 7\alpha - \cos 5\alpha - 3\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$$

27. Sabiendo que $n = 3k$ demostrar que $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=2$.
28. Si $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, calcular $(1 + w)^n$.
29. Hallar las raíces quintas de $z = 16\sqrt{2} - i\,16\sqrt{2}$ y hallar el área del pentágono resultante. Sol: $\frac{5}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,u^2$
30. Si x, y son números reales, demuestre que las raíces cuadradas de $z = x + i\,y$ son de la forma $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{x+|z|}+i\operatorname{sgn}(y)\sqrt{-x+|z|}\right]$, donde en todos los casos se usa la raíz cuadrada positiva y $\operatorname{sgn}(y)$ es la función signo.
31. Calcular las raíces curtas de $z = -4 + 4i\sqrt{3}$.
32. En los complejos hallar $\sqrt[3]{-1}$
33. Resolver la ecuación $z^4 + 81 = 0$.
34. Hallar las soluciones de la ecuación $z^6 + 1 = \sqrt{3}\,i$
35. Demostrar que si w es la raíz cúbica primitiva de la unidad entonces $(1 - w)(1 - w^2) = 3$.
36. Si w es la raíz cúbica primitiva de la unidad demostrar que $(1 - w + w^2)(1 + w - w^2) = 4$
37. Si w es una raíz n-ésima primitiva de la unidad hallar el valor de $S = 1 + 4w + 9w^2 + \ldots + n^2 w^{n-1}$.

Sol: Si $w = 1 \Rightarrow S = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$. Si $w \neq 1 \Rightarrow S = \dfrac{n^2w^2 - 2n(n+1)w + n(n+2)}{(w-1)^2}$.

CAPÍTULO 2 MAT-218

FUNCIONES

1. Sea la función w = f(z) = z² + z – i , hallar los valores de w que corresponden a (*a*) z = 1 + i; (*b*) z = (1 – i)/(1 + i); (*c*) z = (t – i)²(t + i), t es un número real.

2. Si $w = f(z) = (1 + z)/(1 - z)$, hallar: (*a*) f(i), f(1 – i) y representar gráficamente tanto en el plano z como en el plano w.

3. Si $f(z) = (2z + 1)/(3z - 2)$, $z \neq 2/3$, hallar (*a*) f(1/z), (*b*) f(f(z)).

4. Dada la función $f(z) = (z + 2)/(2z - 1)$, hallar (*a*) f(i), $f\left(1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{i}}\right)$; (b) hallar los valores de z tales que f(z) = i, f(z) = 2 – 3i   Sol: (*b*) - i; (2 + i)/3

5. Se da la función $f(z) = x^2 + i\,y^2$, donde z = x + iy. Hallar f(1 +2i); f(2 – 3i).

En los problemas, 6, 7, 8, 9, encontrar arg(f(z)) si $z = \rho e^{i\varphi}$:

6. $f(z) = z^2$.   7. $f(z) = z^3$.   8. $f(z) = \sqrt[3]{z+1}$.   9. $f(z) = \sqrt{z-8}$

Sol: 6. $2\varphi + 4k\pi$. $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ 7. $3\varphi + 6k\pi$. $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

8. $\frac{1}{3}\psi + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ donde $tg\psi = \dfrac{\rho\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$, $\sin\psi = \dfrac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{1+\rho^2+2\rho\cos\varphi}}$ 9. $\frac{1}{2}\psi + k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ donde $tg\psi = \dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi - 8}$, $\sin\psi = \dfrac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{64+\rho^2-16\rho\cos\varphi}}$.

En los problemas 10, 11, 12 y 13 expresar en la forma $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$

10. $w = (z^2 + 1)/2z$.   11. $w = z^3 + z + 1$.   12. $w = (z + 1)/(z - 1)$.   13. $w = e^{2z}$

En los problemas 14, 15, 16 y 17 expresar en la forma $w = f(z)$

14. $w = (x^2 - y^2 - 2x) + i\,(2x - 2xy)$.   15. $w = (x^2 - y^2 - 2y) + i\,(2x - 2xy)$.

16. $w = \dfrac{-8(x^2+y^2)+2-x}{4(x^2+y^2)+1-4x} + i\,\dfrac{7y}{4(x^2+y^2)+1-4x}$.

17. $w = \dfrac{x-2xy-y+1}{(x+1)^2+y^2} + i\,\dfrac{x^2+y-y^2+x}{(x+1)^2+y^2} + i$ Sol: $w = \dfrac{iz+1}{1+\bar{z}}$

18. Un cuadrado S en el plano z tiene los vértices (0, 0); (1, 0); (1, 1); (0, 1). Determinar la región en el plano w en la cual S se aplica bajo la transformación $w = z^2$.

19. Un cuadrado S en el plano z tiene los vértices (0, 0); (1, 0); (1, 1); (0, 1). Determinar la región en el plano w en la cual S se aplica bajo la transformación $w = 1/(z + 1)$.

20. Analizar el problema 18. si el cuadrado tiene los vértices (1, 1); (-1, 1); (-1, -1); (1, -1).

21. Analizar el problema 19. si el cuadrado tiene los vértices (1, 1); (-1, 1); (-1, -1); (1, -1).

22. Con ayuda de la función $w = z^3$ aplicar sobre el plano w la recta $y = x$.

    Sol: La bisectriz de los ángulos de los cuadrantes I y III en el plano z se transforma en la bisectriz de los cuadrantes II y IV en el plano w.

23. Con ayuda de la función $w = 2z + 1$, hallar la aplicación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, en el plano w. Sol: La aplicación buscada es una circunferencia de centro el punto (1, 2) y radio $r = 2$.

24. Dada la aplicación $w = \dfrac{z}{\bar{z}}$. Hallar la imagen de la circunferencia $z = \rho \cos t + i \rho \operatorname{sen} t$, donde $0 \le t \le 2\pi$. Sol: la imagen buscada es la circunferencia $u^2 + v^2 = 1$

25. ¿Qué corresponde en el z - plano a la red polar $|w| = R$, $\arg w = \alpha$ en la transformación $w = e^{z^2}$. Sol: Las hipérbolas $x^2 - y^2 = \ln R$ y $2xy = \alpha + 2k\pi$.

26. Para la transformación $w = z + 1/z$, hallar en el z – plano la preimagen de la red rectangular ($u = C$, $v = C$) del plano w. Sol: La preimagen de la familia $u = C$ es la familia $x(x^2 + y^2 + 1) = C(x^2 + y^2)$, la preimagen de la $v = C$ es la familia $y(x^2 + y^2 - 1) = C(x^2 + y^2)$.

27. Hallar en que se transforma la red rectangular $x = C$; $y = C$, del plano – z, si la función es $w = z^2 + z$. Sol: La familia de las rectas $x = C$ se transforma en la familia $v^2 = -4a(u - a^2 + ¼)$ donde $a = C + ½$ y la familia $y = C$ se transforma en la familia de parábolas $v^2 = -4C^2(u - C^2 + ¼)$

28. Si $f(z) = z^2 + 2z$, demostrar que $\lim\limits_{z \to i} f(z) = 2i - 1$.

29. Si $f(z) = \begin{cases} z^2 + 2z; & z \neq i \\ 3 + 2i; & z = i \end{cases}$, hallar el $\lim\limits_{z \to i} f(z)$ y justifique su respuesta.

30. Calcular $\lim\limits_{z \to \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} \dfrac{z - (1/2 + \sqrt{3/2})iz^2}{z^3 + 1}$.

31. Calcular $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}^2}{z^2}$.

32. Determinar el conjunto de valores de z donde la función $f(z) = \operatorname{Re}(z/(z + 1))$ es continua.

33. Hallar todas las discontinuidades de la función $f(z) = \operatorname{ctg} z$. Sol: $k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

34. Hallar todas las discontinuidades de la función $f(z) = z^2/(\cos z - 1)$.
Sol: $2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

35. ¿Es derivable la función $f(z) = y + xi$? y hallar $f'(z)$ si la función es derivable.
36. ¿Es derivable la función $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$? y hallar $f'(z)$ si la función es derivable.
37. ¿Es derivable la función $f(z) = e^x \cos y + i\, e^{x} \operatorname{sen} y$? y hallar $f'(z)$ si la función es derivable.
38. Mostrar que la función $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i\,(3x^2 y - y^3)$es analítica y encontrar su derivada. Sol: $f'(z) = 3z^2$.
39. ¿Para qué valor de λ la función $f(z) = y + \lambda x\, i$ es derivable? Sol: $\lambda = -1$
40. Dada la función $f(z) = 1/z$, pasar a coordenadas polares y analizar la existencia de la $f'(z)$, $\forall z \neq (0, 0)$.
41. Dada la función $f(z) = \bar{z}/z$, pasar a coordenadas polares y analizar la existencia de la $f'(z)$, $\forall z \neq (0, 0)$.
42. Dada la función $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg}(y/x)$, $x \neq 0$, determinar si es analítica.
43. Si $\operatorname{Im}\{ f'(z) \} = 6x(2y - 1)$ y $f(0) = 3 - 2i$, $f(1) = 6 - 5i$, encontrar $f(1 + i)$. Sol: $6 + 3i$
44. Si $\operatorname{Im}\{f'(z)\} = 3x^2y + 2xy - y^3$, hallar una función analítica $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ si $f(0) = 1$ y expresar f en función de z.
45. Mostrar que la función $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{iy}{x^2 + y^2}$ no es analítica.
46. Demostrar que la función $u(x, y) = 3x^2 y + 2x^2 - 2y^2 - y^3$ es armónica.
47. Demostrar que la función $u(x, y) = e^{-2xy} \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$ es armónica.
48. Hallar todas las funciones armónicas de $u = f(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

$$\textit{Sol:}\ u = c_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_2$$

49. Hallar todas las funciones armónicas de $u = f\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\right)$. Sol: $u = c_1 \dfrac{x}{x^2 + y^2} + c_2$

50. Si $u(x, y) = e^{-x}(x\ sen\ y - y\ cos\ y)$ entonces (a) Verificar si es armónica. (b) Hallar la función $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ sea analítica. (c) Expresar la función encontrada en términos de z. Sol: $f(z) = i\ z\ e^{-z} + i\ c$.

51. Si la función $f(z)$ es analítica, demostrar que $\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2 = |f(z)|^2$.

52. ¿Será armónica la función $u^2(x, y)$, siendo armónica la función $u(x, y)$?
Sol: No, si $u(x, y)$ = constante.

53. Sea $u(x, y)$ una función armónica. ¿Para qué funciones f la función $f(u)$ también será armónica? Sol: $f(u) = au + b$.

54. Demuestre la existencia y encuentre la función analítica $f(z)$ a partir del módulo dado $\rho = (x^2 + y^2)\,e^x$. Sol: $f(z) = e^{i\alpha} z^2 e^z$ (α es una constante arbitraria).

55. Demuestre la existencia y encuentre la función analítica $f(z)$ a partir del argumento dado $\phi = x\,y$. Sol: $f(z) = A\,e^{\frac{z^2}{2}}$ (A es una constante arbitraria positiva).

56. Si $w = f(z)$ es una función analítica y se expresa en coordenadas polares (ρ, φ), demostrar que $\frac{dw}{dz} = e^{-i\varphi}\frac{dw}{d\rho}$.

57. Si u y v son funciones armónicas conjugadas, demostrar que $d\,u = \begin{vmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ dx & dy \end{vmatrix}$

CAPÍTULO 3 MAT-218

FUNCIONES ELEMENTALES

1. Demostrar que la función exponencial $f(z) = e^z$ es analítica en todo plano complejo z.
2. Dada la función $f(z) = e^z$, demostrar que $|f(z)| > 0$, para todo $z \in \boldsymbol{C}$.
3. Probar que $e^{z+\pi i} = -e^z$.
4. Probar que $e^{\frac{2+\pi i}{4}} = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$.
5. Sea z cualquier número complejo no nulo, demostrar que si $z = \rho\, e^{i\varphi}$ entonces $e^{(\ln\rho + i\varphi)} = z$.
6. Resolver la ecuaciónes (a) $e^{2z} = 1$. (b) $e^{iz} = z$.
7. Hallar los valores de z para los cuales $e^z = -2$.

   Sol: $z = \ln 2 + (2k+1)\pi i$; $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
8. Hallar los valores de z para los cuales $e^{(2z-1)} = 1$.

   Sol: $z = \frac{1}{2} + k\pi i$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
9. Demostrar que $|e^{z^2}| \leq e^{|z|^2}$.
10. Demostrar que $|e^{-2z}| < 1$ si y sólo si $\mathrm{Re}(z) > 0$.
11. Para cualquier número complejo z, demostrar que $|\mathrm{sen}\, z|^2 = \mathrm{sen}^2 x + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2$
12. Para $z = x + i\,y$, donde x, y son números reales, demostrar que

    $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2$.
13. Hallar todas las soluciones de la ecuación $\mathrm{sen}\, z = \cosh 4$.

    Sol: $(2n + 1/2)\pi \pm 4i$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
14. Hallar todas las raíces de la ecuación $\cos z = 2$.

    Sol: $2k\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3})$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

    .
15. Demostrar que la función $u(x, y) = \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{senh}\, y$ es armónica.
16. Demostrar que la función $u(x, y) = \cos 2x\, \mathrm{senh}\, 2y$ es armónica.
17. Probar que $\mathrm{senh}(z + \pi i) = -\mathrm{senh}\, z$ y $\cosh(z + \pi i) = -\cosh z$.

18. Demostrar que tgh $(z + \pi\, i) = \text{tg } z$.

19. Hallar todas las raíces de la ecuación $\cosh z = ½$. Sol: $(2k \pm 1/3)\,\pi i$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

20. Hallar todas las raíces de la ecuación $\operatorname{senh} z = i$. Sol: $(2k + ½)\pi i$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

21. Probar que $\ln\{(1 + i)^2\} = 2\ln(1 + i)$, pero $\ln\{(-1 + i)^2\} \neq 2\ln(-1 + i)$,

22. Probar que si $\ln z = \ln \rho + i\varphi$ $(\rho > 0, \pi/4 < \varphi < 9\pi/4)$, entonces $\ln(i^2) = 2\ln i$.

23. Probar que si $\ln z = \ln \rho + i\varphi$ $(\rho > 0, 3\pi/4 < \varphi < 11\pi/4)$, entonces $\ln(i^2) \neq 2\ln i$.

24. Hallar todas las raíces de $\ln z = (\pi/2)i$. Sol: $z = i$.

25. Probar que en los puntos $z = x + iy$ del semiplano de la derecha $x > 0$, la función $\ln z$ se puede escribir $\ln z = ½\ln(x^2 + y^2) + i\,\text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$, siendo $-\pi/2 < \text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) < \pi/2$.

26. Demostrar que $\dfrac{d}{dz}(\ln z) = \dfrac{1}{z}$.

27. Probar que la función $f(z) = \ln(z - i)$ es analítica en todo el plano complejo salvo sobre la semirrecta $y = 1$, $(x \leq 0)$.

28. Probar que la función $f(z) = \dfrac{\ln(z + 4)}{z^2 + 1}$ es analítica en todo el plano complejo salvo en los puntos $\pm(1 - i)/\sqrt{2}$ y sobre la parte $x \leq -4$ del eje real.

29. Demostrar que la función $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ es armónica en todo el dominio que no contiene el origen.

30. Calcular $(1 + i)^i$. Sol: $e^{[-\pi/4 + 2k\pi]}e^{[\frac{i}{2}\ln 2]}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

31. Calcular $(-1)^{1/n}$ Sol: $e^{(2k+1)i}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

32. Hallar todos los valores de $\text{tg}^{-1}(2i)$ Sol: $(k + ½)\pi + i/2 \ln 3$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

33. Hallar todos los valores de $\cosh^{-1}(-1)$.

34. Probar que $|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$

CAPÍTULO 4 MAT-218

INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO

Del problema 1. al 6. Representar gráficamente la curva, mostrar el sentido de ella, clasificar si es un arco simple, arco que se intersecta a si mismo, es curva cerrada simple o curva que se intersecta a si misma.

1. $z(t)=\dfrac{t^2}{1+t^2}+i\dfrac{t(1-t)}{1+t^2};\quad -2\le t\le 5$

2. $z(t)=\dfrac{3t}{1+t^3}+i\dfrac{3t^2}{1+t^3};\quad 0\le t\le 3/2$

3. $z(t)=t^t+i\dfrac{t(4-t^2)}{3};\quad -2\le t\le 2$

4. $z(t)=t^2+i(t^2-t^4);\quad -1\le t\le 1$

5. $z(t)=\dfrac{4t^2}{1+t^2}+i\dfrac{6t(1-t^2)}{1+t^2};\quad -1\le t\le 1$

6. $z(t)=t^2+it(4-t^2);\quad 0\le t\le 2$

7. Utilizando la definición de integración y suponiendo la existencia de la integral, calcular $\int_C z\,dz$, donde C es un contorno cualquiera que une el punto a al punto b. Sol: $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

8. Utilizando la definición de integración y suponiendo la existencia de la integral, calcular $\int_C z^2\,dz$, donde C es un contorno cualquiera que une el punto a al punto b. Sol: $1/3\,(b^3-a^3)$

9. Calcular $\int_C |z|\,dz$, si C es la semicircunferencia $|z|=1,\quad 0\le \arg(z)\le\pi$

10. Calcular $\int_C \dfrac{\bar z}{z}dz$, C es el semianillo dado por $|z|=1;\ |z|=2;\quad y\ge 0$

11. Calcular $\int_C x\,dy$ donde C es la elipse $x=a\cos t,\ \ y=b\,\mathrm{sen}\,t,\quad 0\le t\le 2\pi$. Sol: πab.

12. Calcular $\int_C y\,dx$ donde C es la elipse $x=a\cos t,\ \ y=b\,\mathrm{sen}\,t,\quad 0\le t\le 2\pi$. Sol: $-\pi ab$.

13. Calcular $\int_C (x^2+y^2)dx+2xy\,dy$, donde C es el arco $x=t,\ \ y=t^2,\quad 0\le t\le 1$ Sol: 4/3

14. Hallar el valor de $\int_{(0,1)}^{(2,5)}(3x+y)dx+(2y-x)dy$, a lo largo del arco $y=x^2+1$. Sol: 88/3

15. Hallar el valor de $\int_{(0,1)}^{(2,5)}(3x+y)dx+(2y-x)dy$, a lo largo de la línea recta que une (0, 1) y (2, 5) Sol: 32

16. Hallar el valor de $\int_{(0,1)}^{(2,5)}(3x+y)dx+(2y-x)dy$, a lo largo de las líneas rectas desde (0, 1) y (2, 1) y luego desde (2, 1) a (2, 5) Sol: 24

17. Calcular $\int_C \dfrac{x}{y}dx$ donde C es el arco $z=\sin t+i\cos t,\quad 0\le t\le \frac{\pi}{4}$. Sol: $\frac{1}{8}(2+\pi)$

18. Calcular $\int_C \dfrac{1+xy}{y}dx$ donde C es el arco $z=t+it^2,\quad 1\le t\le 2$. Sol: 2

19. Calcular el valor de $\int_C (x^2-iy^2)dz$, a lo largo de la parábola $y=2x^2$ desde (1, 2) y (2, 8)

20. Calcular el valor de $\int_C (x^2-iy^2)dz$, a lo largo de las líneas rectas desde (1, 1) y (1, 8) y luego

desde (1, 8) a (2, 8). Sol: 518/3 – 57i

21. Calcular la integral $\int_C (x^2+y^2)\,d(x+iy)$, donde C es el cuadrado de vértices (0, 0), (1, 0); (1, 1) y (0, 1). Sol: - 1 + i

22. Calcular el valor de la integral $\int_C \{(x^2-y^2+3x)+i(2xy+3y)\}\,dz$, donde C es la circunferencia $|z|=2$ desde el punto (2, 0), (0, 2); en el sentido contrario a las agujas del reloj. Sol: $-\frac{44}{3}-\frac{8}{3}i$

23. Calcular el valor de la integral $\int_C \{(x^2-y^2+3x)+i(2xy+3y)\}\,dz$, donde C es la recta desde (0, 2) a (0, 2) Sol: $-\frac{44}{3}-\frac{8}{3}i$

24. Encontrar el valor de $\int_C (x^2-y^2-2xyi)\,dz$ alrededor de la circunferencia $|z|=1$. Sol: 0.

25. Encontrar el valor de $\int_C (x^2-y^2-2xyi)\,dz$ alrededor de la circunferencia $|z-1|=1$. Sol: $4\pi i$

26. Hallar $\int_C (2xy^2+\sin x)dx+(2x^2y+\cos y)dy$ donde C es la elipse $z=a\cos t+i\,b\,\text{sen}\,t$, $0\le t\le 2\pi$

Sol: 0

27. Hallar $\int_C y(x+\frac{1}{2}xy+1)dx+\frac{1}{2}x^2(1+y)dy$ donde C es cualquier circunferencia de radio igual 1

Sol: - π

28. Hallar $\int_C \sin z\,dz$, donde C es el contorno $z=i\,t$, $0\le t\le\pi$. Sol: $1-\cosh\pi$

29. Calcular $\int_0^{\pi} e^{(1+i)x}dx$

30. Si m y n son enteros y C es el círculo $|z|=1$ tomado en sentido antihorario, calcular la integral $\int_C z^m\,\bar{z}^n\,dz$.

31. Calcular $\int_C z^{-1+i}\,dz$ donde C es el círculo $|z|=1$ tomado en sentido antihorario.

Sol: $i(1-e^{-2\pi})$

32. Empleando números complejos demostrar que

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

33. Verificar el teorema de Green en el plano para $\oint (x^2-2xy)dx+(y^2-x^3y)dy$ donde C es el cuadrado de vértices $z_0=0$, $z_1=2$; $z_2=2+2i$ y $z_3=2i$ Sol: - 8

34. Verificar el teorema de Green en el plano para $\oint_C (5x+6y-3)dx+(3x-4y+2)dy$ donde C es el triangulo que tiene de lados las rectas $y=4x/3$; $x=3$; $x=0$, el sentido es antihorario. Sol: - 18

35. Si z y $\bar{z}$ son las coordenadas conjugadas complejas y si $F(z,\bar{z})$ y $G(z,\bar{z})$, son dos funciones de

valores complejo de z y $\bar{z}$ que tiene primeras derivadas parciales continuas con respecto a z y $\bar{z}$ en una región R y sobre su frontera C, demuestre el teorema de Green que para el plano se puede escribir de la siguiente manera $\oint_C F(z,\bar{z})dz + G(z,\bar{z})d\bar{z} = 2i\iint_R \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)dA$

36. Empleando el teorema de Green calcular $\oint_C \frac{3x - y^3\sqrt{1+x^2+4y^3}}{3\sqrt{1+x^2+4y^3}}dx + \frac{18y^3 + x^3\sqrt{1+x^2+4y^3}}{3\sqrt{1+x^2+4y^3}}dy$

    donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 1$ Sol: $\frac{\pi}{2}$

37. Empleando el teorema de Green calcular $\oint_C (e^x + x^2 y)dx + 3x^2 y dy$, donde C es la curva cerrada Por las parábolas $y = x^2$; $y^2 = x$ en sentido antihorario. Sol: 41/70

38. Por integral de línea calcular el área acotada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Sug. Puede emplear coordenadas polares) Sol: πab

39. Por integral de línea calcular el área acotada por el eje X, y la parábola $y = 4x - x^2$. Sol: 32/3

40. Por integral de línea calcular el área acotada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$ Sol: 9

41. Por integral de línea calcular el área acotada por el arco de cicloide $x = t - sen\, t$, $y = 1 - cos\, t$ donde $0 \le t \le 2\pi$ se describe un arco completo en sentido antihorario. Sol: 3π

42. Si C es una curva cerrada simple que encierra una región de área A, probar que

$$A = \frac{1}{2i}\oint_C \bar{z}\,dz .$$

43. Si C es una curva cerrada simple que encierra una región de área A, probar que

$$A = \frac{1}{4i}\oint_C \bar{z}\,dz - z\,d\bar{z} .$$

44. Verificar el teorema de Cauchy para la función $f(z) = 3z^2 + iz - 4$, si C es el cuadrado de vértices $1 \pm i$, $-1 \pm i$.

45. Verificar el teorema de Cauchy para la función $f(z) = 5\sin 2z$, si C es el cuadrado de vértices $1 \pm i$, $-1 \pm i$.

46. Verificar el teorema de Cauchy para la función $f(z) = 3\cosh(z+2)$, si C es el cuadrado de vértices $1 \pm i$, $-1 \pm i$.

47. Verificar el teorema de Cauchy para la función $f(z) = z^3 - iz^2 - 5z + 2i$, si C es el círculo $|z - 1| = 2$.

48. Verificar el teorema de Cauchy para la función $f(z) = z^3 - iz^2 - 5z + 2i$, si C es la elipse $|z - 3i| + |z + 3i| = 20$.

49. Explicar claramente la relación entre las integrales

$$\oint_C (x^2 - y^2 + 2y)dx + (2x - 2xy)dy = 0 \quad \text{y} \quad \oint_C (z^2 - 2iz)dz = 0$$

    donde C es una curva cerrada simple.

50. La curva C es parte de la parábola $y^2 = 4x$ que une los puntos (1, - 2) y (4, 4). Calcular

$$\int_C (2z+3i)\,dz$$

Empleando tres diferentes caminos. Sol: - 15 +45 i

51. Probar que $\int_C e^{-2z}\,dz$ es independiente del camino C que une los puntos 1 - πi y 2 + 3πi y determinar el valor Sol: $\frac{1}{2}e^{-2}(1-e^{-2})$

52. Si C es la curva $y = x^3 - 5x + 5$ que une los puntos (1, 1) y (2, 3), hallar el valor de la siguiente integral por tres métodos diferentes, $\int_C (12z^2 - 4iz)\,dz$ Sol: - 156 + 38 i

53. Si C es la curva $y = \sqrt{4-\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x}$ que une los puntos (- 7, - 2) y (2, 2), hallar el valor de la siguiente integral por tres métodos diferentes, $\int_C (z^2 + 2z - i)\,dz$

54. Denotemos por C la frontera del cuadrado cuyos lados están sobre las rectas $x = \pm 2;\ y = \pm 2$ donde C se recorre en sentido positivo. Calcular $\oint_C \frac{e^{-z}dz}{z-(\pi i/2)}$. Sol: 2π.

55. Denotemos por C la frontera del cuadrado cuyos lados están sobre las rectas $x = \pm 2;\ y = \pm 2$ donde C se recorre en sentido positivo. Calcular $\oint_C \frac{\cos z\ dz}{z^2+8}$. Sol: $\pi i/4$.

56. Denotemos por C la frontera de la circunferencia $|z| = 2$, donde C recorre en sentido positivo. Calcular $\oint_C \frac{\tan(z/2)\ dz}{(z+a)^2}$. (- 2 < a < 2) Sol: $\pi i \sec^2(a/2)$

57. Hallar el valor de la integral de $g(z)$ sobre el círculo $|z - i| = 2$ con la orientación positiva, cuando $g(z) = 1/(z^2+4)$

58. Hallar el valor de la integral de $f(z)$ sobre el cuadrado de vértices ((1, 0); (1, 3); (- 1, 3) y (- 1, 0) con la orientación positiva, cuando $f(z) = 1/(z^2+4)^2$. Sol: π/16.

59. Demostrar que si f es analítica dentro y sobre un contorno simple cerrado C y a en C, entonces $\oint_C \frac{f'(z)\ dz}{z-a} = \oint_C \frac{f(z)\ dz}{(z-a)^2}$.

60. Calcular $\oint_C \frac{\cos z\ dz}{z^3}$ si C es el círculo unitario $|z| = 1$. en sentido positivo. Sol: - πi

61. Calcular $\oint_C \frac{\sinh^2 z\ dz}{z^3}$ si C es el círculo unitario $|z| = 1$. en sentido positivo. Sol: 2πi

62. Evaluar la integral $\oint_C \frac{1}{z^3}\cos\frac{1}{z+1}\,dz$ si C es el círculo en sentido positivo $|z| = ½$. Sol: $\pi^3 i$

63. Hallar $\oint_C \frac{e^{1/z}}{(z^2+4)^2}\,dz$ si C es el círculo en sentido positivo $|z - 2| = 1$. Sol: 0

64. Calcular $\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}\,dz$, si C es el círculo en sentido positivo $|z - 1| = ½$. Sol: $-\frac{1+i}{2}e^{i}$

Capitulo 5.

SUCESIONES Y SERIES INFINITAS

Sucesiones:

En cada uno de los ejercicios del 1. al 6. determinar la convergencia o divergencia de la sucesión u_n indicada, en los casos de convergencia, calcular el límite.

1. $\{(0.7)^n\}$. Sol: 0 **2.** $\{(0.99)^n\}$ Sol: 0. **3.** $\{(-0.5)^n\}$. Sol: 0

4. $\{(\frac{1}{5})^n\}$. Sol: 0 **5.** $\{3\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)+\frac{n+1}{3^n}\}$ Sol. 3 **6.** $\{\cos n\pi\}$

7. ¿Es convergente la sucesión $u_1 = \sqrt{3}$ con $u_n = \sqrt{3+U_{n-1}}$?. En caso afirmativo, calcular el límite. Sol: $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$

8. Siendo $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}}$, $a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$, etc. Calcular L = $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ Sol: 3

9. Calcular el L = $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ si $a_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$ Sol: L = 1

10. Calcular el L = $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ si $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Sol: 2

11. ¿Cuál es el mayor elemento de la sucesión $\left(\frac{4^n}{n!}\right)$? y calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}$

12. Sea $u_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\bullet 3}+\frac{1}{3\bullet 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.

(a) Hallar la expresión más simple para u_n Sol: (a) $n/(n+1)$

(b) Calcular el límite de u_n cuando $n\to\infty$ (b) 1

13. Hallar la fórmula explícita para la ecuación de recurrencia de la sucesión $\{u_n\}$ si tenemos $u_0 = 1$, $u_n = 2\,u_{n-1}$,. . . Sol: $\{u_n\} = \{2^n\}$

14. Hallar la fórmula explícita para la ecuación de recurrencia de la sucesión $\{u_{n+2}\}$ si tenemos $u_5 = 26$, $u_{n+1} = 3\,u_n + 2$, . . . Sol: $\{u_{n+2}\} = \{3^n - 1\}$

15. Hallar u_n si tenemos los siguientes datos $2u_n = 2u_{n-1} - 3u_{n-2}$ para $n > 1$ y $u_0 = \frac{1+\sqrt{5}i}{2}$, $u_1 = 3$

Sol: $u_n = \frac{1+\sqrt{5}i}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}i}{2}\right)^n$

16. Dados $u_2 = 3$ y para todo n entero positivo $u_{n-1} = u_n - (n + l)$. Encontrar la expresión para u_n

Sol: $u_n = \frac{1}{2}\left(n^2+n-4\right)$

En los problemas del 17. al 20. determinar si la sucesión es decreciente, creciente, además encontrar sus cotas superiores o inferiores, si es que existen.

17. $\left\{\frac{3n-1}{4n+5}\right\}$. Sol: Creciente. **18.** $\left\{\frac{1-2n^2}{n^2}\right\}$. Sol: Decreciente

19. $\left\{\dfrac{5^n}{1+5^{2n}}\right\}$. Sol: Decreciente. **20.** $\left\{\dfrac{n!}{3^n}\right\}$. Sol: creciente

21. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i}\,)$ Sol: i/2

22. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+ib_n)$, donde $a_n = 2\left(\dfrac{1}{4}\right)^1 + 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + 4\left(\dfrac{1}{4}\right)^3 + \ldots + (n+1)\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

$b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Sol: $\dfrac{7}{9}+i$

23. Analizar la convergencia o divergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{(1+i)^n}{n}\right\}$.

24. Analizar la convergencia o divergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{n}{n+3i}-\dfrac{ni}{n+1}\right\}$. Sol: es con.

25. Demuestre que la sucesión $\left\{e^{i\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right\}$. es convergente y encuentre su límite.

26. Probar que la sucesión $\left\{-2+i\,\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}$. converge a -2.

Series Infinitas:

En los problemas 1. al 8. obtenga los primeros cinco términos (S_1, S_2,S_3,S_4, S_5) y obtenga una fórmula para S_n en términos de *n*. determinar también si la serie infinita es convergente o divergente; en caso de ser convergente hallar la suma S.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(2n-1)(2n+1)}$. Sol: $S_n = \dfrac{3n}{2n+1}; \dfrac{3}{2}$ **2.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(3n+1)(2n-2)}$. Sol: $S_n = \dfrac{5n}{3n+1}; \dfrac{5}{3}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$ Sol: S = $\dfrac{1}{3}$ **4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{2^n}$ Sol: S = 7

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)}$ Sol: S = $\dfrac{5}{4}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$ Sol: $S_n = -\ln(n+1)$; *Div*. **8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}}$ Sol: $S_n = \dfrac{5}{2}\left(1-\dfrac{1}{5^n}\right)$; $S = \dfrac{5}{3}$

En los ejercicios 13. al 21. determinar si la serie es convergente o divergente, si la serie es convergente obtenga la suma S. para tal efecto emplear $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ con k constante o $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n + \sum_{n=1}^{\infty}v_n$ en caso necesario.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ Sol: 10/3. **14.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{5n}$, Sol: Div. **15.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ Sol: 28/5

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n}\right)$, Sol: 2. **17.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4^n}+\frac{4}{5^n}\right)$ **18.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+n)$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{5^n}\right)$, Sol: Div. **20.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+2\right)$ Sol. Div. **21.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(7-\frac{3}{2n}\right)$

22. Hallar la suma S de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$ sabiendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}-1$, Sol: $2-\dfrac{\pi^2}{6}$

23. Hallar la suma S de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{2^{n-1}}$ Sol: S = 16

24. Hallar la suma S de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ Sol: S = -ln2

25. Hallar la suma S de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ Sol: $\frac{\pi}{4}$

26. Hallar la suma S de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, S = ½ . 27. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$; S = 1/6

28. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$; S = 1/10 29. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+2a-1)(2n+2a+1)}$, $S = \frac{1}{2(2a+1)}$

En los ejercicios 30. al 35. determinar si la serie es convergente o divergente, en estos problemas emplear el criterio de comparación, o el criterio de comparación por límites.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n}$, Sol: conv.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$, Sol: div.

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$, Sol: conv.

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}$, Sol: conv.

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n^2+5}$, Sol: div.

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$, Sol: conv.

En los ejercicios 36. al 43 determinar si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente, o divergente, para este efecto emplear el criterio de la razón.

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n^2+5}$, Sol: Abs. Conv.

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin \pi n}{n}$, Sol: Abs. Conv.

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} e^{n(1/2-i)}$, Sol: Abs. Conv.

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{n!}$, Sol: Abs. Conv.

40. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$, Sol: Abs. Conv

41. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$, Sol: Conv. Cond.

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{2n+1}$, Sol: Conv. Cond.

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n(1+n^2)}{n!}$

SERIES DE POTENCIAS

En los problemas 44. al 53. obtener en intervalo de convergencia o la región de convergencia de la serie de potencias dadas, además mostrar la gráfica del intervalo o la región.

44. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ Sol: $[-1,1]$.

45**.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ Sol: $]-\infty,+\infty[$

46. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ Sol: $]-\infty,+\infty[$

47**.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n}$. Sol: $]-5,5[$

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!z^n}{(n!)^2}$. Sol: $|z|<1/4$.

49**.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{9^n z^n}\right)$. Sol: $\frac{1}{9}<|z|<1$.

50. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^n(z-1)^n}$. Sol: $|z-5/2|>3/2$.

51. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n-1}(z-2i)^{n+1}$. Sol: $|z-2i|<1$

52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+z^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+z^{n-1}}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$

SERIES DE TAYLOR, MACLAURIN Y LAURENT

54. Obtener la serie de Taylor de la función f(z) = sen z en el punto $z = a$.

55. Obtener la serie de Taylor de la función f(z) = cos z en el punto $z = 0$.

Sol: f(z) = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n}}{(2n)!}$

56. Demuestre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ representa a la función f(z) = senh z, para todo valor de z.

57. Demuestre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ representa a la función f(z) = cosh z, para todo valor de z.

58. Encuentre la serie de Maclaurin para la función f(z) = $\sin^2 z$, empleando una identidad trigonométrica. Sol: $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2z)^{2n}}{(2n)!}$

59. Encuentre la serie de Maclaurin para la función f(z) = $\cos^2 z$, empleando una identidad trigonométrica.

60. Encuentre la serie de Maclaurin para la función f(z) = $\frac{3+2z}{z+z^2}$, Sol: $\frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-1}$

61. Encuentre la serie de Maclaurin para la función f(z) = $\frac{3+2z}{z-z^2}$,

62. Verificar que la serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3-3^{2n+1}) z^{2n+1}}{4(2n+1)!}$ corresponde a la función $f(z) = \sin^3 z$

63. Verificar que la serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3+3^{2n}) z^{2n}}{4(2n)!}$ corresponde a la función $f(z) = \cos^3 z$

64. Use la serie de Maclaurin de $f(z) = \ln(1+z)$ para encontrar la serie de Taylor para ln z en el punto z = 2. Sol: $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z-2)^n}{n 2^n}$

65. Encontrar la serie de Maclaurin que corresponde a la función $f(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

Sol: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{n} z^n$

66. Encontrar los tres primeros términos del desarrollo de la serie de Maclaurin de la función f(z) = tan z.

67. Encontrar los tres primeros términos del desarrollo de la serie de Maclaurin de la función f(z) = $\sec^2$ z. Sol: $1 + z^2 + \frac{2}{3} z^4$

68. Encontrar los tres primeros términos del desarrollo de la serie de Maclaurin de la función f(z) = ln cos z Sol: $\frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{12} z^4 + \frac{1}{45} z^6$

69. Encontrar la serie de Maclaurin que corresponde a la función $f(z) = \arctan z$.

Sol: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$

70. Encontrar la serie de Maclaurin que corresponde a la función $f(z) = \frac{z}{z^4+9}$.

71. Desarrolle z^{-n} en una serie de Taylor alrededor del punto z = 1, y especifique su dominio de convergencia. Sol: $z^{-n} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p (n+p-1)!}{p!(n-1)!} (z-1)^p$

72. Desarrolle z^{-n} en una serie de Maclaurin de la función f(z) = $(1 - z)^{-n}$, para n = 1, 2, 3, . . . y especifique el dominio de convergencia. Sol: $f(z)=1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}z^{p}$

73. Desarrollar la función f(z) = $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ en la serie de Laurent en el disco | z | <1

Sol: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^{n}$

74. Desarrollar la función f(z) = $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ en la serie de Laurent en el anillo 1 < | z | < 2

Sol: $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{z^{n}}{2^{n+1}}\right)z^{n}$

75. Determinar la serie de Laurent de f(z) = $\frac{z}{z^{2}+z-2}$ en | z | <1. Sol: $f(z)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^{n}}{2^{n}}\right)z^{n}$

76. la serie de Laurent de f(z) = $\frac{2}{z^{2}-1}$ en 1 < | z+2 | < 3. Sol: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^{n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^{n}}{3^{n+1}}$

77. Hallar la serie de Laurent de f(z) = $\frac{2}{z^{2}-1}$ en 1 < | z+2 | < 3. Sol: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^{n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^{n}}{3^{n+1}}$

78. Determinar la serie de Laurent de f(z) = $\frac{1}{z^{2}+2z-8}$ en el anillo 1 < | z+2 | < 4.

79. Determinar la serie de Laurent de f(z) = $\frac{1}{(z+2)(1+z^{2})}$ en el anillo 1 < | z | < 4.

80. Determinar la serie de Laurent de f(z) = $\frac{3}{(4-z)^{2}}+\frac{2}{(2z-3)^{2}}$ en el anillo ½ < | z | < 3.

Sol: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{3^{n}}-2^{n}\right)(z-1)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(3^{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{1}{(z-1)^{n+2}}$

81. Desarrollar en serie de Laurent la función f(z) = $z^{4}\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ en torno del punto z = 0

Sol: $z^{4}\cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^{4}-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!z^{2}}+\cdots$

82. Desarrollar en serie de Laurent la función f(z) = $\frac{\sin^{2} z}{z}$ en torno del punto z = 0

Sol: $\frac{\sin^{2} z}{z} = \frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^{3}}{5!}-\frac{z^{5}}{7!}+\cdots$

83. Desarrollar en serie de Laurent la función f(z) = $\frac{1-\cos z}{z^{2}}$ en torno del punto z = 0

Sol: $\frac{1-\cos z}{z^{2}} = \frac{1}{2!}-\frac{z^{2}}{4!}+\frac{z^{4}}{6!}-\frac{z^{6}}{8!}+\cdots$

84. Desarrollar en serie de Laurent la función f(z) = $\frac{z+2}{z^{2}-4z+3}$ en 2< | z-1 | <+∞

Sol: $\frac{z+2}{z^{2}-4z+3} = \frac{1}{z-1}+5\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{(z-1)^{n}}$

85. Probar que $\frac{e^{z}}{z^{3}+z} = \frac{1}{z}+1-\frac{z}{2}-\frac{5z^{2}}{6}+\cdots$ (0 < | z | < 1)

86. Probar que $\frac{1}{e^{z}-1} = \frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{z}{12}-\frac{5z^{2}}{6}-\frac{z^{3}}{720}+\cdots$ (0 < | z | < 2π)

87. Hallar por lo menos dos términos de la serie que corresponde a la función

f(z) = sen(sen z)

PRACTICA Nº 1

MATERIA: MAT - 218
(VARIABLE COMPLEJA)

SEM: 21- 2021

CURSO VIRTUAL

PAGINAS	ESTUDIANTES	AUXILIARES
2	2, 4, 10, 12, 16	Problemas impares
3	20, 24, 26, 30, 36	Problemas impares
4	4, 8, 14, 18	Problemas impares
5	24, 28, 32	Problemas impares
6	36, 40, 42, 48	Problemas impares
7	50, 54, 56	Problemas impares
8	4, 6, 10, 14	Problemas impares
9	20, 24, 32	

FECHA DE ENVIO: . . . .

LA ENTREGA A SUS AUXILIARES

La Paz FEBRERO de 2021