NUMEROS COMPLEJOS.

IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS

1. Calcular $m - n$ en la siguiente igualdad: $m - 2 + 3i = 2 - ni$. Rpta.- $m - n = 7$
2. Hallar el valor de x e y si: $(1 + i)x + (-2 + 5i)y = -4 + 17i$. Rpta.- $x = 2; y = 3$
3. Calcular x^y si se cumple la siguiente relación: $(2 - 5i)x + (1 + 3i)y - 8 + 9i = 0$.
Rpta.- $x^y = 9$
4. Calcular el valor de x e y si se cumple la siguiente relación:
 $12[(2x + i)(1 + i) + (x + y)(3 - 2i)] = 17 + 6i$. Rpta.- $x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{4}$
5. Hallar $x - y$ en la siguiente igualdad:
 $x(3 + 4i) - y(8 - 3i) = (2xi - 10y + 4) + (4yi - 2x + 7i)$ Rpta.- $x - y = 5$
6. Cuando se cumple que: $(m + ni)^2 = m - ni$, entonces determinar: $m + ni$.
Rpta.- $m + ni = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$
7. Dada la igualdad de complejos $(1 + i)^2 + (1 + i)^4 + (1 + i)^6 + (1 + i)^8 = x + yi$,
8. determinar: $F = \frac{x + y}{x - y}$
 $F = \frac{x + y}{x - y}$. Rpta.- $F = \frac{1}{3}$

Hallar las soluciones reales en las siguientes igualdades.

9. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+yi} = 1+i$ Rpta.- $x = \frac{2}{5}; y = -\frac{1}{5}$
10. $\frac{x(1-2i)^2 + y(2+3i)^2}{3-2i} = -2+4i$ Rpta.- $x = -\frac{13}{7}; y = \frac{5}{7}$
11. Hallar los números reales x e y tal que:
 $2x - 3iy - 2y - 5 - 10i = (x + y - 2) - (y - x + 3)i$
12. Hallar los valores de a y b si: $(a + b) + (a - b)i = (2 + 5i)^2 + i(2 - 3i)$

OPERACIONES EN LOS COMPLEJOS

13. Luego de simplificar: $z = \frac{(2 + 3i)^2}{2 + i}$, determinar: $P = 5\sqrt{[\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2}$
Rpta.- $P = 13\sqrt{5}$
14. Simplificar: $E = \frac{(1+i)^{11}}{1+i^{11}} + \frac{(1+i)^{13}}{1+i^{13}}$ Rpta.- $E = -96$

PRACTICA N° 2. GUIA DE PROBLEMAS DE ALGEBRA - MAT 100

Lic. Edilberto Mamani Espejo.

15. Calcular: $z = \left(\frac{325+17i}{17-325i}\right)^{15} + \left(\frac{31+20i}{20-31i}\right)^{24} + i^{861}$ **Rpta.- $z = 1$**
16. Simplificar: $z = \frac{1+i}{1-\frac{1+i}{1-\frac{1+i}{1-\frac{1+i}{1-i}}}}$ **Rpta.- $z = i$**
17. Expresar en forma cartesiana: $z = 1 + \frac{i}{1 + \frac{i}{1 + \frac{i}{1+i}}}$. **Rpta.- $z = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i$**
18. Expresar en forma cartesiana el complejo: $z = \frac{i^{32} \cdot 2i^{7^2} + 4i^{10^3} + 6i^{11^5}}{(\sqrt{3}-i)^3}$ **Rpta.- $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$**
19. Si $z = \frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}-i)^3}$ Hallar $\text{Im}(z^2)$. **Rpta.- $z = -\frac{1}{2}$**
20. Simplificar: $z = \frac{(i-2i^{-1})^3(i-3i^{-1})^2}{(i+2i^{-1})^2(i+3i^{-1})^3}$ **Rpta.- $z = -54$**
- 21.Cuál debe ser el valor de k para que el cociente: $\frac{3+4i}{1-ki}$ sea real puro? **Rpta.- $k = -\frac{4}{3}$**
22. Halle todos los valores reales de x y los valores correspondientes de w que hacen que el número complejo $w = (x-i)[(x+3)-4i]$ sea imaginario puro. **Rpta.- $x = -4; 1$ y $w = 17i; -8i$**
23. La suma de dos números complejos es: $3+6i$, la parte real del primero es 2. Hallar el producto de éstos números complejos, sabiendo que el cociente del primero entre el segundo es un número real. **Rpta.- $z_1 \cdot z_2 = -6+8i$**
24. La suma de dos números complejos z_1 y z_2 es: $-2-6i$. Si la parte real de z_1 y cociente $\frac{z_1}{z_2}$ es un número imaginario puro. Calcular la suma de los módulos de dichos complejos. **Rpta.- $|z_1| + |z_2| = 4\sqrt{5}$**

PRACTICA N° 2. GUIA DE PROBLEMAS DE ALGEBRA - MAT 100

Lic. Edilberto Mamani Espejo.

25. Calcular el complejo, $5z + 2w^2 + u$, sabiendo que: $z = \frac{(1+i)^4 + (1-i)^4}{2+i}$, $w = \frac{4i^{11} - i}{1+2i}$,
 $u = i^{75} + \left[(1-i)^{-2i} \right]^{3i}$. **Rpta.-** $-10 + 7i$

26. Calcular: $E = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ donde $n \in \mathbb{Z}$ **Rpta.-** $E = 2i^{n-1}$

27. Al efectuar $\frac{a-i}{b+2i}$ resulta un número imaginario puro, pero al efectuar $\frac{b-i}{a-2i}$ resulta un número real. Hallar a y b . ($a \geq 0 \wedge b \geq 0$). **Rpta.-** $a = 2; b = 1$.

28. Calcular $(x+y)$ si: $\left[\sqrt[1+i]{(x+yi)^{(1-i)}} \right]^{-i} = 2+3i$. **Rpta.-** $x+y = -\frac{1}{13}$.

29. Siendo a un número imaginario puro y b real. Calcular $(ab)^2$, a partir de $a(2b-2+a) + b(a-3) = -30i - 21$, sabiendo además que $(ab)^2 \in \mathbb{Z}$.
Rpta.- $(ab)^2 = -144$.

30. Expresar en la forma biónica: $w = \frac{(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)i}{(x-y) + (x+y)i}$
Rpta.- $w = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - \frac{xy(x-y)}{x^2 + y^2}i$

31. Demostrar que $\forall w, z, v \in \mathbb{C}: w \operatorname{Im}(\bar{z} \cdot v) + z \operatorname{Im}(\bar{v} \cdot w) + v \operatorname{Im}(\bar{w} \cdot z) = (0, 0)$.

32. Si $z, w \in \mathbb{C}$, demostrar que: $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right) = 1$

CONJUGADA Y MODULO EN LOS COMPLEJOS

33. Resolver la ecuación: $\frac{|z|-z}{3} = 3-5i$. **Rpta.-** $z = 8+15i$

34. Calcular el módulo de: $z = 1 + \frac{i}{1 + \frac{i}{1 + \frac{i}{1+i}}}$. **Rpta.-** $|z| = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

35. Si $z, w \in \mathbb{C}$: demostrar que $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

36. Si $w = \frac{2+i}{3-i}$ y $z = \frac{1-i}{2+i}$, hallar $|w+z|$. **Rpta.-** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

PRACTICA N° 2. GUIA DE PROBLEMAS DE ALGEBRA - MAT 100
Lic. Edilberto Mamani Espejo.

37. Si $z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)(-3+3i)}{(1-i)(3i)(1-\sqrt{3}i)}$, Hallar $|z|$ **Rpta.-** $\sqrt{2}$
38. Calcular z^2 , siendo: $z = -| -1+i | + \sqrt{2}i$ **Rpta.-** $4i$
39. Siendo z un número complejo, además: $\text{Re}(z) = 7$. Hallar: $E = |1+z|^2 - |1-z|^2$
Rpta.- $E = 28$
40. Sean $z = -2+4i$ y $w = 1-i$. Hállese el valor de: $\left| \frac{w+z+1}{w-z+i} \right|$
Rpta.- $\left| \frac{w+z+1}{w-z+i} \right| = \frac{3}{5}$
41. Si z es un número complejo tal que: $|z|=1$, calcular: $|1+z|^2 + |1-z|^2$.
Rpta.- $|1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$
42. Demostrar que: $\left| z - \frac{3}{4}i \right| = \frac{1}{4}$ si $z = \frac{i-a}{1+2ai}$; $a \in \mathbb{R}$.
43. Demostrar la identidad: $|1-\bar{z}w|^2 - |z-w|^2 = (1-|z|^2)(1-|w|^2)$
44. Hallar el complejo z en: $\overline{\left(\frac{zi-2}{1-i} \right)} = \frac{\bar{z}i+1}{1-i}$. **Rpta.-** $z = \frac{-3-i}{2}$
45. Hallar el complejo z en: $\frac{\overline{(zi+1)}}{\bar{z}i-2} = \frac{2+i}{1-2i}$. **Rpta.-** $z = \frac{3-i}{2}$
46. La diferencia de dos números complejos es real, su producto vale $1+3i$ y la parte real de la suma es igual a 3. Calcular la suma de los cuadrados de los módulos.
Rpta.- $|z|^2 + |w|^2 = 7$
47. Existen dos números complejos que cumplen la condición de que su módulo vale $\sqrt{2}$ y que al dividirlo por su conjugado el cociente es "i". Dar el valor de la suma de dichos complejos.
Rpta.- $z_1 = 1+i$ y $z_2 = -1-i \Rightarrow z_1 + z_2 = 0$.
48. El cociente de dos números complejos es imaginario puro, su suma es real y vale 5. El módulo del dividendo es el doble que el divisor. Hallar el divisor.
Rpta.- $u = 1 \pm 2i$.
49. Si se cumple: $|z-k| = |z+k+i|$ y $z = a+bi$; $k \in \mathbb{R}$. Determinar el valor de k .
Rpta.- $k = \frac{2b+1}{4a}$.
50. Hallar todos los números complejos z que satisfacen las dos ecuaciones:

PRACTICA N° 2. GUIA DE PROBLEMAS DE ALGEBRA - MAT 100
Lic. Edilberto Mamani Espejo.

$$|z|=2; \quad |z+1|=\sqrt{2}|z-1|, \quad \text{Rpta.-} \quad z_1 = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{119}}{6}i; \quad z_2 = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{119}}{6}i$$

51. Resolver en el conjunto de los números complejos, el sistema:

$$\begin{cases} (1+i)z - w = -1 - i \\ 2iz + (1-i)w = i \end{cases} \quad \text{Rpta.-} \quad z = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i; \quad w = \frac{3}{2}i$$

52. Resolver en el conjunto de los números complejos, el sistema:

$$\begin{cases} (3+i)z + (4+2i)w = 2+6i \\ (4+2i)z - (2+3i)w = 5+4i \end{cases}$$

FORMA POLAR EN LOS COMPLEJOS

53. Expresar en forma polar:

a) $\sqrt{3} - i$ b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{4}$ c) i d) $3 - 4i$ e) $6\sqrt{3} + 6i$
f) $3 - 3\sqrt{3}i$ g) $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

54. Escribir en forma polar el resultado de: $z = (6 + 2\sqrt{3}i)(7 + 7i)(4\sqrt{3} + 12i)$

$$\text{Rpta.-} \quad z = 627\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\text{sen}\frac{3\pi}{4}).$$

55. Expresar en forma polar: $\frac{1 + \cos\beta + i\text{sen}\beta}{1 + \cos\beta - i\text{sen}\beta}$, $(0 < \beta < \frac{\pi}{2})$

$$\text{Rpta.-} \quad \cos\beta + i\text{sen}\beta.$$

56. Pasando a su forma polar, efectuar los cálculos:

a) $\frac{-4 + 4\sqrt{3}i}{2\sqrt{3} - 2i}$ b) $\frac{(4 + 4i)(-\sqrt{3} + 3i)}{(-\sqrt{3} - i)}$ c) $\frac{(1+i)(-\sqrt{3}+i)}{(1+i)(\sqrt{3}+i)}$

$$\text{Rpta.-} \quad \text{a) } 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] \quad \text{c) } 4\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$

57. Expresar el producto en forma rectangular:

a) $2(\cos 20^\circ + i\text{sen}20^\circ)5(\cos 70^\circ + i\text{sen}70^\circ)$ b) $\frac{3}{4}(\cos\frac{7\pi}{18} + i\text{sen}\frac{7\pi}{18})\frac{8}{3}(\cos\frac{4\pi}{9} + i\text{sen}\frac{4\pi}{9})$

$$\text{Rpta.-} \quad \text{a) } 0 + 10i \quad \text{b) } -\sqrt{3} + i$$

58. Expresar el cociente en forma rectangular

a) $4(\cos 65^\circ + i\text{sen}65^\circ) \div 3(\cos 20^\circ + i\text{sen}20^\circ)$ **Rpta.-** $\frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}i$

b) $6(\cos\frac{7\pi}{18} + i\text{sen}\frac{7\pi}{18}) \div \frac{3}{2}(\cos\frac{7\pi}{9} + i\text{sen}\frac{7\pi}{9})$ **Rpta.-** $1.3680 - 3.7587i$

59. Calcular: $\frac{(\sqrt{3}-i)(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}{2(1+i)(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)}$. **Rpta.-** $\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(2\theta - \frac{5\pi}{12}\right) + i\operatorname{sen}\left(2\theta - \frac{5\pi}{12}\right) \right]$

60. Calcular: $z = \frac{5\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})2\sqrt{3}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3})}{2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6})}$. **Rpta.-** $w = 5\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

POTENCIACIÓN EN LOS COMPLEJOS

61. Dado: $z = 1 - i$, hallar: z^{-3} . **Rpta.-** $z^{-3} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$

Calcular y expresar el resultado en la forma: $(a + bi)$

62. $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{100}$. **Rpta.-** $z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$

63. $w = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{20}$ **Rpta.-** $z = 2^9(1 - \sqrt{3}i)$

64. $w = (2 - 2i)^{10} - (2 + 2i)^{10}$ **Rpta.-** $w = 0 - 2^{16}i$

65. $z = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-60}$ **Rpta.-** $z = 1$

66. $z = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - \sqrt{3}i)^{15}}{(1 + i)^{20}}$. **Rpta.-** $z = -64 + 0i$

67. $u = \frac{\left[\sqrt[3]{3}(\cos 31^\circ + i\operatorname{sen} 31^\circ)\right]^3 \left[\sqrt[5]{5}(\cos 12^\circ + i\operatorname{sen} 12^\circ)\right]^5}{\left[\sqrt[3]{15}(\cos 11^\circ + i\operatorname{sen} 11^\circ)\right]^3}$. **Rpta.-** $u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

68. Si $z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}i$, hallar: $\operatorname{Re}(z^{20})$. **Rpta.-** $\operatorname{Re}(z^{20}) = -2^{19}$

69. Calcular: $\left[\frac{(6 - 6i)(\sqrt{3} - 3i)}{(4\sqrt{3} + 4i)\left(\cos\frac{13\pi}{12} - i\operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}\right)} \right]^5$ **Rpta.-** $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^5 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right]$

70. Pasando a su forma polar, efectuar los cálculos y los resultados expresar en forma cartesiana:

PRACTICA N° 2. GUIA DE PROBLEMAS DE ALGEBRA - MAT 100
Lic. Edilberto Mamani Espejo.

$$\text{a) } \frac{(1+i)^2(\sqrt{3}+i)^3}{(2-2i)^5} \qquad \text{b) } \frac{(-\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^6}{(-\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^8(\sqrt{15}-\sqrt{5}i)^7}$$

71. Pasando a su forma polar, efectuar los cálculos y los resultados expresar en forma cartesiana:

$$\text{a) } \frac{(1+\sqrt{3}i)^{30}}{(2-2i)^{10}} \qquad \text{b) } \frac{(-\sqrt{3}+3i)^{12}}{(2+2i)^{18}} \qquad \text{Rpta.- a) } 2^{15}i \qquad \text{b) } -\frac{3^6}{2^{15}}i$$

RADICACIÓN EN LOS COMPLEJOS

72. Hallar las cuatro raíces del número complejo $z = 16 - 16\sqrt{3}i$

$$\text{Rpta.- } w_0 = 2^{5/4} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\text{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right]; \quad w_1 = 2^{5/4} \left[\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\text{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right) \right]$$

$$w_2 = 2^{5/4} \left[\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\text{sen}\left(\frac{19\pi}{12}\right) \right]; \quad w_3 = 2^{5/4} \left[\cos\left(\frac{25\pi}{12}\right) + i\text{sen}\left(\frac{25\pi}{12}\right) \right]$$

73. Hallar las raíces de orden 6 de $z = -64$. **Rpta.-** $\pm\sqrt{3} + i; \pm 2i; \pm\sqrt{3} - i$

74. Hallar las raíces cúbicas de $z = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$

$$\text{Rpta.- } w_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i; \quad w_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{3} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}; \quad w_2 = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

75. Hallar las raíces de orden 4 de $z = 648(-1 + \sqrt{3}i)$

$$\text{Rpta.- } w_0 = 3\sqrt{3} + 3i; \quad w_1 = -\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}; \quad w_2 = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

76. Hallar las raíces cúbicas de: $z = \frac{5 + \sqrt{3}i}{2 - \sqrt{3}i}$.

$$\text{Rpta.- } w_0 = \sqrt[3]{2}(\cos 20^\circ + i\text{sen} 20^\circ), \quad w_1 = \sqrt[3]{2}(\cos 140^\circ + i\text{sen} 140^\circ),$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2}(\cos 260^\circ + i\text{sen} 260^\circ)$$

77. Calcular las raíces quintas de: $z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - \sqrt{3}i}$

$$\text{Rpta.- } w_k = \cos(18 + 72^\circ k) + i\text{sen}(18 + 72^\circ k); \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

78. Calcular las raíces cúbicas de: $z = \frac{10 + 6\sqrt{3}i}{1 - 2\sqrt{3}i}$

$$\text{Rpta.- } w_k = \sqrt[4]{4}[\cos(40^\circ + 120^\circ k) + i\text{sen}(40^\circ + 120^\circ k)]; \quad k = 0, 1, 2$$

79. Calcular: **a)** $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ **b)** $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$

PRACTICA N° 2. GUIA DE PROBLEMAS DE ALGEBRA - MAT 100
Lic. Edilberto Mamani Espejo.

80. Determinar las tres raíces de z en la ecuación: $\frac{z^3 + i}{z^3 - i} = \frac{1 + i}{1 - i}$
Rpta.- $z_0 = 1; z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
81. Resolver la ecuación en $\mathbb{C}$: $x^2 + (-2 - 2i)x = 3 - 6i$ **Rpta.-**
82. Resuelva la ecuación en $\mathbb{C}$: $z^2 - 3z - 10i = 0$ **Rpta.-** $4 + 2i; -1 - 2i$
83. Determinar las raíces del número complejo z en la ecuación: $\frac{z^3 - 1}{z^3 + 1} = i$.
Rpta.- $z = \cos(30^\circ + 120^\circ k) + i \operatorname{sen}(30^\circ + 120^\circ k); k = 0, 1, 2$
84. Resolver: $(1 - i)z^2 + 4z = -3 - 9i$ **Rpta.-** $z = 3; z = -1 + 2i$
85. Determinar todas las raíces sextas de la unidad.
86. Demostrar que si w es raíz cúbica primitiva de la unidad, entonces $(1 - w)(1 - w^2) = 3$
87. Demostrar que: $(1 - w)^2(1 - w^2)^2(1 - w^4)^2(1 - w^5)^2 = 8$, sabiendo que, $1, w, w^2$ son las tres raíces cúbicas de la unidad.
88. Sabiendo que $1, w, w^2$ son las raíces cúbicas de la unidad, calcular:
 $S = (m - n)(wm - w^2n)(w^2m - wn)$ **Rpta.-** $S = m^3 - n^3$
89. Sea $S = 1 + w + w^4 + w^9$, donde w es una raíz primitiva de $z^4 - 1 = 0$, Hallar, $|S|$

Rpta.- $|S| = 2\sqrt{2}$

POLINOMIOS Y SUS RAICES. -

TEOREMA DEL RESTO Y DEL FACTOR

90. Calcular el resto en la división: $\frac{3x^{410} - 2x^{121} - 5x^{10} - 2x + 1}{x + i}$. **Rpta.-** $3 + 4i$.

91. Si $x = -3$ es un cero del polinomio: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$. **Rpta.-** $-1; -2$.

Hallar el cociente y el resto que resulta de dividir $P(x)$ entre $d(x)$.

92. $P(x) = x^5 + (3\sqrt{2} - 2)x^3 + 2\sqrt{2} + 7$; $d(x) = x - \sqrt{2} + 1$.
Rpta.- $Q(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$; $R = 5$.

93. $P(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$; $d(x) = x + 2 + i$
Rpta.- $Q(x) = x^2 + 2x - 2$; $R = 5$.

94. Dado: $P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$; hallar m, n y p , si $P(x)$ es divisible por el producto $(x - 3)(x + 1)(x - 1)$.
Rpta.- $m = 8$; $n = 5$; $p = -6$.

95. Si $(x^2 - 4)(x + 3)$ son factores del polinomio: $P(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 + mx^2 + nx + p$, con m, n y p constantes en los $\mathbb{R}$, determinar el valor de: $E = m + n + p$.
Rpta.- $E = 7$.

96. Si $(x - k)^2$ es un factor del polinomio: $P(x) = x^5 - 5ax + 4b$, mostrar que: $a^2 = b^4$.

97. Sea el polinomio $P(x) = ix^3 + 2x^2 - ax + 7 + 2i$. Al restar del resto de $P(x)$ entre $(x - 3i)$, el resto de $P(x)$ entre $(x - 2i)$ se obtiene $(b + i)$. Hallar el residuo al dividir $P(x)$ entre $(x - 3i)(x - 2i)$.
Rpta.- $R(x) = (x - 11) + (2 - 9x)i$.

98. Si $(x + 1)$ es un factor de $x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$ y de $x^3 - (a + 2b)x + 2a$. Hallar ab .
Rpta.- $a = 3$; $b = -4$.

99. Determinar los valores de a, b y c , de modo que $(x - 3)(x - 1)(x + 1)$ sean factores de: $P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$.
Rpta.- $a = 8$; $b = 5$; $c = -6$.

RAICES DE UN POLINOMIO

Raíces complejas e irracionales.

100. Si $-i$ es raíz del polinomio: $P(x) = (\lambda + 3)x^3 - x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda$, encontrar el valor de λ .
Rpta.- $\lambda = -1$.

101. Hallar todas las raíces de la ecuación polinómica: $x^4 + x^3 + x^2 + 11x + 10 = 0$, sabiendo que una de sus raíces es: $1 + 2i$. **Rpta.-** $1 + 2i$; $1 - 2i$; -2 ; -1 .

PRACTICA N° 2. GUIA DE PROBLEMAS DE ALGEBRA - MAT 100

Lic. Edilberto Mamani Espejo.

102. Si una raíz de la ecuación de coeficientes reales: $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$ es $3 - i$; calcular el valor de $(a - b)$. **Rpta.-** $a - b = 26$.

103. Si: $x^6 - 2x^5 - 4x^4 - 8x^3 - 77x^2 + 90x + 360 = 0$ tienen por raíces: $\sqrt{5}$, $3i$; hallar las otras raíces. **Rpta.-** $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$; $x_{3,4} = \pm 3i$; $x_5 = 4$; $x_6 = -2$.

104. Si: $-1 + i$ es una de las raíces de la ecuación: $2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 2x + 12 = 0$, hallar las otras raíces. **Rpta.-** $x_{1,2} = -1 \pm i$; $x_3 = 2$; $x_4 = \frac{3}{2}$.

105. Hallar todas las raíces de la ecuación: $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 19x + 5 = 0$, si $2 + \sqrt{3}$ es una de sus raíces. **Rpta.-** $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$; $x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}i$.

106. Construir un polinomio con coeficientes reales, de grado mínimo, que tenga como raíces los números: 1 ; $1 + \sqrt{5}$; $3i$. **Rpta.-** $P(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 23x^2 - 18x + 36$.

107. Construir una ecuación de grado seis, entre cuyas raíces se encuentran los números: $1 + i$; $1 + \sqrt{2}$; y $\frac{1}{2}$. **Rpta.-** $4x^6 - 20x^5 + 37x^4 - 32x^3 + 5x^2 + 6x - 2 = 0$.

108. Cierta ecuación de cuarto grado tiene coeficientes reales racionales y dos de sus raíces son: $\frac{10}{1+3i}$ y $\frac{13}{2+3i}$. Determinar dicha ecuación.

Rpta.- $x^4 - 6x^3 + 31x^2 - 66x + 130 = 0$.

Raíces racionales.

109. Hallar todas las raíces de la ecuación polinómica: $12x^4 - 44x^3 + 37x^2 + 11x - 10 = 0$
Rpta.- $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$; 2

110. Determinar todas las raíces enteras de la ecuación: $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$.
Rpta.- -4 ; -2 ; 1 ; 3 .

111. Determinar todas las raíces de la ecuación: $6x^5 - 23x^4 + 30x^3 - 10x^2 - 16x + 8 = 0$
Rpta.- $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $1 - i$; $1 + i$

112. Hallar todas las raíces de la ecuación polinómica: $6x^4 + 5x^3 + 19x^2 + 15x + 3 = 0$.
Rpta.- $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $\sqrt{3}i$; $-\sqrt{3}i$

113. Determinar todas las soluciones de la ecuación polinómica: $18x^5 - 57x^4 + 125x^3 - 87x^2 - 43x + 20 = 0$.
Rpta.- $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{3}$; $1 - 2i$; $1 + 2i$

PRACTICA N° 2. GUIA DE PROBLEMAS DE ALGEBRA - MAT 100

Lic. Edilberto Mamani Espejo.

114. Determinar todas las soluciones de la ecuación polinómica:
 $9x^4 + 15x^3 - 143x^2 + 41x + 30 = 0$. **Rpta.-** $-5; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 3$

115. Determinar todas las raíces de la ecuación: $4x^5 - 16x^4 + 17x^3 - 19x^2 + 13x - 3 = 0$.
Rpta.- $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 3; \pm i$

RELACION DE LAS RAÍCES Y LOS COEFICIENTES

116. Resolver la ecuación: $24x^3 + 46x^2 + 9x - 9 = 0$, sabiendo que una de las raíces es el doble de la otra.
Rpta.- $-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{3}$

117. Hallar las raíces de la ecuación: $8x^4 - 2x^3 - 27x^2 + 6x + 9 = 0$, siendo dos de sus raíces iguales y de signo contrario.
Rpta.- $-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \pm\sqrt{3}$

118. Hallar las constantes a y b en la ecuación polinómica: $ax^3 - 6x^2 + 2ax - 3b = 0$, sabiendo que la suma de sus raíces es 3 y su producto 6.
Rpta.- $a = 2; b = 4$

119. Hallar el valor de k , para que la ecuación: $x^3 + x^2 - 9x + k = 0$, tenga una raíz diferente y las otras dos iguales en magnitud pero de signos contrarios.
Rpta.- $k = -9; x_{1,2} = \pm 3; x_3 = -1$

120. Sabiendo que las raíces de la ecuación: $x^3 + mx^2 + nx + m = 0$, son proporcionales a 2, 3 y 4. Hallar n .
Rpta.- $n = \frac{39}{4}$.

121. En una ecuación polinómica de cuarto grado y de coeficientes reales, una de sus raíces es: $3 - 2i$, la suma y el producto de todas las raíces son 7 y -26 respectivamente. Determinar las otras dos raíces.
Rpta.- $x_3 = 2; x_4 = -1$.

122. Hallar el valor de k , si las raíces de la ecuación: $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$, están dadas de la forma: $a - r; a; a + r$.
Rpta.- $k = 8$.

123. Encontrar las raíces de la ecuación: $x^3 - x^2 + px + 4 = 0$, sabiendo que la suma de dos de sus raíces es cero.
Rpta.- $p = -4; x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = 1$.

124. Siendo a, b y c las raíces de la ecuación: $3x^3 - px + q = 0$. Calcular el valor de:
 $E = 3(a^3 + b^3 + c^3)(b^2 + c^2 + a^2)$. **Rpta.-** $E = -2pq$.

125. Si $r_1; r_2$ y r_3 , son las raíces de la ecuación: $2x^3 + x - 2 = 0$, calcular:
 $M = \frac{r_1^3 + r_2^3 + r_3^3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3} + r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1}$. **Rpta.-** $M = \frac{13}{2}$.

PRACTICA N° 2. GUIA DE PROBLEMAS DE ALGEBRA - MAT 100

Lic. Edilberto Mamani Espejo.

126. Resolver la ecuación: $3x^3 + kx^2 - 7x + 3 = 0$ y hallar el valor de k si las raíces, en cierto orden, están en progresión geométrica. **Rpta.-** $k = -7$.
127. En la ecuación: $x^3 - 7x + \lambda = 0$, determinar el valor de λ tal que una de sus raíces sea el doble de la otra. **Rpta.-** $\lambda = 6; \lambda = -6$.
128. Si dos raíces imaginarias de la ecuación: $2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 2 = 0$ son $i; 1+i$, calcular: $a+b+c+d$. **Rpta.-** $a+b+c+d = 2$.
129. En la siguiente ecuación cúbica: $x^3 + 2x^2 + bx - 4 = 0$. El cuadrado de la única raíz positiva, es igual a la diferencia de los cuadrados de las otras dos. Indicar dicha raíz positiva. **Rpta.-** La única raíz positiva es: $x = \sqrt{2}$.
130. Si las raíces de la ecuación: $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ son: r_1, r_2, r_3 y r_4 , entonces el valor de: $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}$; es: **Rpta.-** $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = 3$.
131. Resolver la ecuación: $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$, si las raíces esta en progresión aritmética creciente. **Rpta.-** $r_1 = \frac{1}{4}; r_2 = \frac{1}{4}; r_3 = \frac{1}{4}$.
132. Indicar el valor de m en la ecuación: $x^4 - 8x^3 + mx^2 - 8x - 3 = 0$, sabiendo que la suma de dos raíces es igual a la suma de las otras dos. **Rpta.-** $m = 18$.
133. Sabiendo que la suma de las inversas de las raíces de la ecuación: $x^3 + 4x^2 + (8 + a^2)x - (a - 1)(2a + 5) = 0$; $a > 0$. ¿Cuál es la raíz de menor módulo? **Rpta.-** $x = 1$.
134. En una ecuación polinomial de cuarto grado y de coeficientes reales, una de sus raíces es: $3 - 2i$, la suma y el producto de todas las raíces son 7 y -26 respectivamente. Entonces las otras dos raíces serán: **Rpta.-** $x_3 = 2; x_4 = -1$.

MÉTODO DE NEWTON-RHAPSON

135. Hallar la raíz irracional en el intervalo $(2,3)$ de la ecuación: $x^3 - 5x - 3 = 0$ con cuatro cifras de aproximación. **Rpta.-** $x = 2,4908$.
136. Hallar la raíz irracional en el intervalo $(-1,0)$ de la ecuación: $3x^3 - 7x - 2 = 0$ con cuatro cifras de aproximación. **Rpta.-** $x = -0,2969$.
137. Calcular la raíz irracional en el intervalo $(0,1)$ de la ecuación: $x^4 - 10x + 5 = 0$ con cuatro cifras de aproximación. **Rpta.-** $x = 0,5065$.

PRACTICA N° 2. GUIA DE PROBLEMAS DE ALGEBRA - MAT 100

Lic. Edilberto Mamani Espejo.

138. Calcular la raíz irracional en el intervalo $(2,3)$ de la ecuación:
 $x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = 0$ con cuatro cifras de aproximación. **Rpta.-** $x = 2,8284$.
139. Calcular la raíz irracional en el intervalo $(4,5)$ de la ecuación:
 $x^3 + 3x^2 - 26x + 69 = 0$ con cuatro cifras de aproximación.
Rpta.- $x = 4,9873$.
140. Calcular la raíz irracional en el intervalo $(-3,-2)$ de la ecuación:
 $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ con cuatro cifras de aproximación. **Rpta.-** $x = -2,2340$.
141. Hallar la raíz irracional en el intervalo $(1,2)$ de la ecuación:
 $x^4 - 2x^3 + 21x - 23 = 0$ con cuatro cifras de aproximación.
Rpta.- $x = 1,1574$.
142. Hallar la raíz irracional en el intervalo $[-2,0]$ de la ecuación: $x + \cos x = 0$
con cuatro cifras de aproximación. **Rpta.-** $x = -0,7391$.
143. Hallar la raíz irracional en el intervalo $(0,1)$ de la ecuación: $x + \ln x = 0$ con
tres cifras de aproximación. **Rpta.-** $x = 0,567$.
144. Hallar la raíz irracional en el intervalo $(0,1)$ de la ecuación: $7e^{-x} \operatorname{sen} x = 0$ con
seis cifras de aproximación. **Rpta.-** $x = 0,170180$.
145. Hallar la raíz irracional en el intervalo $(1,2)$ de la ecuación:
 $e^x + x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ con cuatro cifras de aproximación.
Rpta.- $x = 1,2032$.